Planche 1 - CCINP

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le spectre de A de trois façons :
   (a) En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.
   (b) En calculant son polynôme caractéristique χ_A.
   (c) En calculant son polynôme minimal μ_A.
2. La matrice A est-elle diagonalsable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle diagonalsable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$?
   Dans ce cas, déterminer $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Planche 2 - CCINP

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 + x}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n).
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur son intervalle de convergence simple.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]-1, 1[,\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$.
5. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ converge et calculer sa somme à l'aide des questions précédentes.

Planche 3 - CCINP

On considère la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\forall n \geq 2,\ d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-2}{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{cases} d_0)1 \\ d_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer d_2 et d_3.
   Montrer que : $\forall n \geq 2,\ (n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n \leq 1$.
   Que peut-on dire du rayon de convergence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$?
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par S. Déterminer alors une autre expression de S sans le symbole somme.
4. Donner une expression de d_n sous forme de somme.

Planche 4 - Mines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\det(\lambda A^2 + I_n) \geq 0$.
2. On suppose maintenant que A est antisymétrique.
   Montrer que le résultat précédent est alors valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Planche 5 - Mines

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe P polynôme annulateur de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.