ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°4

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $\mathrm{R} > 0$?

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit N entier non nul, $p \in \,]\,0\,;1\,[$, $q = 1 - p$. On considère $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Pour $i \in [\![\, 1\,;\, \mathrm{N} \,]\!]$ et n entier non nul, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$.
   (a) Pour n entier non nul, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > n)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

On considère la suite de fonctions $(u_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathrm{id}$ et $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$ pour n entier.

1. Étudier la convergence simple de $(u_n)_n$.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 5 (Mines-Telecom 2023)

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f, x) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ et calculer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $(\mathrm{G}, +)$ un groupe abélien d'ordre pq avec p et q des nombres premiers distincts.

1. Montrer que le groupe $(\mathrm{G}, +)$ est cyclique.
2. Trouver un contre-exemple dans le cas non abélien.

Exercice 7 (Mines 2023)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On pose $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-\|x\|^2}$

Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^n$ puis les déterminer.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Pour n entier non nul, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n et on pose $\mathrm{P}_n = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p$.

1. Établir $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

2. (a) Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \binom{2n+1}{n} < 4^n$

   (b) Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_{2n+1} < 4^n \mathrm{P}_{n+1}$

3. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n < 4^n$

Exercice 9 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et $\mathrm{T}_n = \dfrac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{k(n^k - 1)}{(n+k)!}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 (ENS 2023)

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $|a_i| \geqslant 2$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.

1. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que la matrice A est inversible et que son déterminant a même signe que $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

2. Montrer que le résultat précédent vaut encore si l'on remplace la condition $a_{i,j} = 1$ pour $|i-j| = 1$ par $|a_{i,j}| \leqslant 1$ pour $|i-j| = 1$.