ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Soit $(u_n)_n$ suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^n u_n$.
2. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Corrigé : Exercice 8 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence
$$\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$$
2. Montrer que pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{A}^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Établir $\mathrm{A}^2\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$.

Corrigé : Exercice 66 CCPINP 2023

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par
$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}((\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (j,k)) = \frac{(j+k)}{\mathrm{e}\,2^{j+k} j!k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}})$ puis la calculer.

Corrigé : Exercice 97 CCPINP 2023

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tels que $(\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q} + \mathrm{X}^n\mathrm{P} = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(\mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2$.
2. Décrire $\mathcal{S}$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}] \\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}+\mathrm{X}^n\mathrm{P} \end{cases}$

L'application Φ est bien définie puisque pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, on a

$$\deg(\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}+\mathrm{X}^n\mathrm{P} \leqslant \max(\deg(\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}, \deg \mathrm{X}^n\mathrm{P}) \leqslant 2n-1$$

et elle est linéaire par bilinéarité du produit. Pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il vient

$$\Phi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 0 \iff (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q} = -\mathrm{X}^n\mathrm{P}$$

On a $(\mathrm{X}-1)^n \wedge \mathrm{X}^n = 1$ et $\mathrm{X}^n|(\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}$ d'où $\mathrm{X}^n|\mathrm{Q}$ d'après le lemme de Gauss. Comme on a $\deg \mathrm{Q} \leqslant n-1$, on en déduit $\mathrm{Q}=0$ puis $\mathrm{P}=0$ par intégrité ce qui prouve l'injectivité de Φ. Enfin, on observe

$$\dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2 = 2n = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$$

L'application Φ est linéaire injective entre deux espaces de même dimension et c'est par conséquent un isomorphisme. On en déduit que l'équation $\Phi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 1$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2$ et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (\mathrm{P}_0,\mathrm{Q}_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2.}$$

2. Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$. On a

$$\begin{aligned} (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathcal{S} &\iff (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}+\mathrm{X}^n\mathrm{P} = 1 \\ &\iff \begin{cases} (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}+\mathrm{X}^n\mathrm{P} = 1 \\ (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q}_0+\mathrm{X}^n\mathrm{P}_0 = 1 \end{cases} \iff (\mathrm{X}-1)^n(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}_0) = -\mathrm{X}^n(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0) \end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme de Gauss, comme $\mathrm{X}^n|(\mathrm{X}-1)^n(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}_0)$, il vient $\mathrm{X}^n|(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}_0)$ d'où $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_0 + \mathrm{X}^n\mathrm{R}$ avec $\mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et

$$-\mathrm{X}^n(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0) = (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{X}^n\mathrm{R}$$

d'où $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 - (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{R}$. Ainsi, on a

$$\mathcal{S} \subset \{(\mathrm{P}_0 - (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{R}, \mathrm{Q}_0 + \mathrm{X}^n\mathrm{R}), \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$$

et on vérifie l'inclusion réciproque sans difficulté. On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(\mathrm{P}_0 - (\mathrm{X}-1)^n\mathrm{R}, \mathrm{Q}_0 + \mathrm{X}^n\mathrm{R}), \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie et soit $(u_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $(\|u_n - x\|)_n$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Corrigé : 1. La suite $(\|u_n\|_n)$ est convergente donc bornée. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans une boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} \geqslant 0$ qui est un fermé borné dans un espace de dimension finie et est donc compacte. Par conséquent

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ admet une valeur d'adhérence.}}$$

2. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathrm{E}$. Par hypothèse, on dispose de $c \geqslant 0$ tel que

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

Par extraction, il vient $$\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$
et on déduit $c = 0$ par unicité de la limite. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge.}}$$

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose $$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que la fonction K admet un maximum et un minimum sur $[\,0\,;1\,]^2$ puis les déterminer.

Corrigé : On observe l'égalité
$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \min(s,t)\,(1-\max(s,t))$$
La fonction K est continue comme composée de telles fonctions et par conséquent, elle atteint ses bornes sur le compact $[\,0\,;1\,]^1$ (fermé borné de l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension finie). On remarque
$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{K}(s,t) = 0 \iff (s,t) \in \{0,1\} \times [\,0\,;1\,] \cup [\,0\,;1\,] \times \{0,1\}$$
puis $$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) \leqslant \max(s,t)\,(1-\max(s,t)) \leqslant \underset{u\in[\,0\,;1\,]}{\mathrm{Max}}\, u(1-u) = \frac{1}{4}$$
et $$\mathrm{K}(s,t) = \frac{1}{4} \iff \max(s,t) = \min(s,t) = \frac{1}{2} \iff s = t = \frac{1}{2}$$

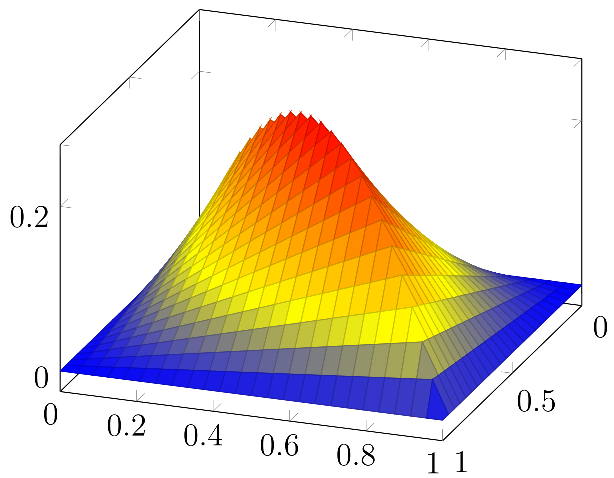

Figure 1 – Tracé de $z = \mathrm{K}(s,t)$

$$\boxed{\text{La fonction K atteint son minimum sur K sur } \partial\mathrm{K} \text{ et son maximum en } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).}$$

Exercice 7 (Mines 2023)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$. Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})^k)$$

Corrigé : On procède par récurrence en considérant la proposition

$$\mathscr{P}(k) : (\mathrm{A}+\mathrm{B})^k = \mathrm{A}^k + \mathrm{BM}_k\mathrm{A} + \mathrm{B}^k \quad \text{avec} \quad \mathrm{M}_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

L'initialisation $\mathscr{P}(1)$ est vraie avec $\mathrm{M}_1 = 0$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie avec k entier non nul. On a

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{k+1} &= (\mathrm{A}+\mathrm{B})^k(\mathrm{A}+\mathrm{B})\\ &= (\mathrm{A}^k + \mathrm{BM}_k\mathrm{A} + \mathrm{B}^k)(\mathrm{A}+\mathrm{B})\\ &= \mathrm{A}^{k+1} + \mathrm{BM}_k\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^k\mathrm{A} + \mathrm{A}^k\mathrm{B} + \mathrm{BM}_k\mathrm{AB} + \mathrm{B}^{k+1} = \mathrm{A}^{k+1} + \mathrm{B}\left(\mathrm{M}_k\mathrm{A} + \mathrm{B}^{k-1}\right)\mathrm{A} + \mathrm{B}^{k+1}\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité et clôt la récurrence. Passant à la trace, il vient pour k entier non nul en utilisant la propriété fondamentale de la trace

$$\mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k + \mathrm{BM}_k\mathrm{A} + \mathrm{B}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}_k\mathrm{AB}) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k)$$

On conclut $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})^k)}$

Exercice 8 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [\,0\,;1\,]$. On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1 & \ldots & \mathrm{X}_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{U}^\top\mathrm{U}$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$.
2. Calculer la probabilité que la matrice M soit une matrice de projection.

Corrigé : 1. On a
$$\mathrm{M} = \left(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

d'où
$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i^2 = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i$$

qui est une somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$. Puis, on a clairement $\mathrm{Im}\ \mathrm{M} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}^\top)$ d'où $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) \in \{0,1\}$ et

$$\{\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 0\} = \mathrm{U} = 0 = \bigcap_{i=1}^n \{\mathrm{X}_i = 0\}$$

et par indépendance
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{\mathrm{X}_i = 0\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) = (1-p)^n$$

On conclut $\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \sim \mathscr{B}(n,p) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) \sim \mathscr{B}((1-p)^n)}$

2. On a par associativité
$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{U}^\top\left(\mathrm{UU}^\top\right)\mathrm{U} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$$

d'où
$$\{\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M} = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{M} = 0\} \sqcup \{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 1\}$$

Par incompatibilité puis indépendance, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}) &= \mathbb{P}(\mathrm{M} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 1)\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 1) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 1)\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1+(n-1)p)(1-p)^{n-1}}$

Exercice 9 (Centrale 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1. Montrer que C_n est entier pour tout n entier.
2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k}$ pour n entier.
3. Déterminer les entiers n non nuls tels que C_n soit impair.

Corrigé : 1. Soit n entier. On a

$$\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

Ainsi $$(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$$

En remarquant l'égalité $2(n+1) - (2n+1) = 1$, on en déduit $(n+1) \wedge (2n+1) = 1$ et d'après le lemme de Gauss, on obtient que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$. Ainsi

$$\boxed{\text{Le nombre } \mathrm{C}_n \text{ est entier pour tout } n \text{ entier.}}$$

Variante : Une autre approche consiste à observer pour n entier

$$\mathrm{C}_n = \frac{n+1-n}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Le résultat suit.

2. L'expression fait penser à un produit de Cauchy. Pour n entier, on a

$$\frac{\mathrm{C}_{n+1}}{\mathrm{C}_n} = \frac{n+1}{n+2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum \mathrm{C}_n z^n$ est $\dfrac{1}{4}$ d'après l'utilisation du critère de d'Alembert. D'après le théorème du produit de Cauchy de séries entières, on obtient

$$\forall z \in \mathrm{D}\left(0, \frac{1}{4}\right) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_n z^n\right)^2$$

Dans ce qui suit, on note $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{4}\right[$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$$

Par dérivation de série entière, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\mathrm{S}(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

Toujours par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\binom{2n}{n} x^n$$

et par linéarité du symbole somme dans l'intervalle ouvert de convergence I

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{T}'(x) = 4x\mathrm{T}'(x) + 2\mathrm{T}(x)$$

La fonction T est donc solution sur l'intervalle I du problème de Cauchy

$$\begin{cases}(1-4x)y'-2y=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on en déduit

$$\forall x\in \mathrm{I}\qquad \mathrm{T}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

Après intégration, on trouve

$$\forall x\in \mathrm{I}\qquad \mathrm{S}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puis, il vient

$$\forall x\in \mathrm{I}\smallsetminus\{0\}\qquad \mathrm{S}(x)^2=\frac{1}{4x^2}\left(1-2\sqrt{1-4x}+1-4x\right)=\frac{1}{x}\left(\mathrm{S}(x)-1\right)$$

d'où $\qquad \forall x\in \mathrm{I}\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{n-k}\right)x^{n+1}=x\mathrm{S}(x)^2=\mathrm{S}(x)-1=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{n+1}x^{n+1}$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{C}_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{n-k}}$$

3. Soit n entier non nul. On observe

$$\mathrm{C}_n=\begin{cases}2\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{n-1-k}\right) & \text{si } n \text{ pair}\\ 2\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{n-1-k}\right)+\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

Comme un entier et son carré sont de même parité, on obtient

$$\mathrm{C}_n \text{ impair}\iff n \text{ impair}\quad\text{et}\quad \mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} \text{ impair}\qquad (*)$$

On note $n=\langle d_{p-1},\dots,d_0\rangle$ son écriture binaire avec $d_{p-1}=1$ et $d_i\in\{0,1\}$ pour $i\in[\![\,0\,;\,p-2\,]\!]$.

On a donc $\qquad \mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_0\rangle}\equiv 1\ [2]\iff d_0=1\quad\text{et}\quad \mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_1\rangle}\equiv 1\ [2]$

Pour $k\in[\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$, on note

$$\mathscr{P}(k):\mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_0\rangle}\equiv 1\ [2]\iff \forall i\in[\![\,0\,;\,k-1\,]\!]\qquad d_i=1\quad\text{et}\quad \mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_k\rangle}\equiv 1\ [2]$$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k\in[\![\,0\,;\,p-2\,]\!]$. D'après l'équivalence $(*)$, on obtient

$$\mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_k\rangle}\equiv 1\ [2]\iff d_k=1\quad\text{et}\quad \mathrm{C}_{\langle d_{p-1},\dots,d_{k+1}\rangle}\equiv 1\ [2]$$

ce qui prouve l'hérédité et clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\text{Les entiers } n \text{ non nuls tels que } \mathrm{C}_n \text{ est impair sont de la forme } n=2^p-1 \text{ avec } p \text{ entier non nul.}}$$

Variante : On peut procéder sans la relation établie à la question 2. Soit n entier non nul. On montre

$$v_2(n!)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor=n-s_2(n)$$

où s_2 désigne la fonction somme des chiffres de l'écriture binaire. Il vient

$$\begin{aligned}
v_2(\mathrm{C}_n) &= v_2((2n)!) - 2v_2(n!) - v_2(n+1)\\
&= 2n - s_2(2n) - 2n + 2s_2(n) - v_2(n+1)\\
&= s_2(n) - v_2(n+1) = n - v_2(n!) - v_2(n+1) = n+1 - v_2((n+1)!) - 1 = s_2(n+1) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $v_2(\mathrm{C}_n) = 0 \iff s_2(n+1) = 1 \iff n+1 = 2^p$ avec p entier non nul

et on retrouve le résultat précédemment établi.

Exercice 10 (Centrale 2023, X 2019)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe fini d'ordre n. On note $\widehat{\mathrm{G}}$ l'ensemble des morphismes de $(\mathrm{G}, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G. Que peut-on dire de l'ordre de $g \in \mathrm{G}$?
   (b) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$, préciser les valeurs possibles pour $\varphi(g)$ avec $g \in \mathrm{G}$.
   (c) Montrer que l'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est fini. On note $\widehat{n}$ son cardinal.
2. (a) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$, montrer $\sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.
   (c) En déduire $\widehat{n} \leqslant n$.
   (d) Si le groupe $(\mathrm{G}, \star)$ est cyclique, établir $\widehat{n} = n$.
3. On suppose $(\mathrm{G}, +)$ abélien fini.
   (a) Pour $x \in \mathrm{G}$, on note $\delta_x : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(x)$. Vérifier que $\delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ pour $x \in \mathrm{G}$ puis établir que l'application $\Phi : \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme.
   (b) En déduire $\widehat{n}$.

Corrigé : 1.(a) Soit $g \in \mathrm{G}$. L'ordre de g noté $o(g)$ est le plus petit entier k non nul tel que $g^k = e$. On a $o(g) | n$.

1.(b) Soit $g \in \mathrm{G}$. On a $\qquad \varphi(g^n) = \varphi(e) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(g^n) = \varphi(g)^n$

D'où $$\boxed{\forall g \in \mathrm{G} \qquad \varphi(g) \in \mathbb{U}_n}$$

1.(c) On a $\widehat{\mathrm{G}} \subset \mathbb{U}_n^{\mathrm{G}}$ avec G et $\mathbb{U}_n$ des ensembles finis. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \widehat{\mathrm{G}} \text{ est fini.}}$$

Remarque : L'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est appelé *dual* de G et les éléments de $\widehat{\mathrm{G}}$ sont appelés *caractères* de G.

2.(a) Soit $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$. On dispose de $a \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $\mathrm{G} \to \mathrm{G}, g \mapsto a \star g$ réalise une permutation de G et il vient

$$\sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(a \star g) = \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(a)\varphi(g)$$

d'où $$(1 - \varphi(a)) \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = 0$$

On conclut $$\boxed{\sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = 0}$$

2.(b) Observons en premier lieu que l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ possède bien une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ étant commutatif, on vérifie sans difficulté que $(\widehat{\mathrm{G}}, \times)$ possède une structure de groupe (la loi $\times$ est bien une loi interne à $\widehat{\mathrm{G}}$ et tout le reste suit). Soit $(\alpha_\varphi)_{\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}}$ famille de complexes telle que $\sum\limits_{\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi \varphi = 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$. Soit $\psi \in \widehat{\mathrm{G}}$. Il vient

$$\sum_{\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi \varphi \psi^{-1} = 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$$

d'où
$$\sum_{g \in \mathrm{G}} \left(\sum_{\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi \varphi \psi^{-1} \right) = 0$$

et en permutant l'ordre de sommation, il vient

$$\sum_{\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi \left(\sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi \psi^{-1}(g) \right) = \alpha_\psi = 0$$

On conclut $\boxed{\text{La famille } \widehat{\mathrm{G}} \text{ est une partie libre de } \mathbb{C}^{\mathrm{G}}.}$

2.(c) Soit $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$. On a
$$\varphi = \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) \mathbb{1}_{\{g\}}$$

ce qui prouve que la famille $\left\{\mathbb{1}_{\{g\}}\right\}_{g \in \mathrm{G}}$ est génératrice de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$. Il s'ensuit que $\dim \mathbb{C}^{\mathrm{G}} \leqslant n$ et comme la famille $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, on conclut

$$\boxed{\widehat{n} \leqslant n}$$

2.(d) Soit $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{G} = \langle g \rangle = \{kg, k \in \mathbb{Z}\}$ et soit $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$. On a $\varphi(g) \in \mathbb{U}_n$ d'où $\varphi(g) = \omega^\ell$ avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et $\ell \in [\![0\,; n-1]\!]$. Il en résulte que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(kg) = \varphi(g)^k = \omega^{k\ell}$$

On pose
$$\forall \ell \in [\![0\,; n-1]\!] \qquad \chi_\ell \colon \begin{cases} \mathrm{G} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ kg,\ k \in \mathbb{Z} & \longmapsto \omega^{\ell k} \end{cases}$$

Soit $\ell \in [\![0\,; n-1]\!]$. L'application χ_ℓ est bien définie. En effet, soit $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $kg = k'g$. On a $(k - k')g = 0$ d'où $n | (k - k')$ ce qui prouve $k = k' + nq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et il vient

$$\omega^{k\ell} = \omega^{(k'+nq)\ell} = \omega^{k'\ell} \omega^{nq\ell} = \omega^{k'\ell}$$

De plus, c'est un élément de $\widehat{\mathrm{G}}$ puisque

$$\forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \qquad \chi_\ell(kg + k'g) = \chi_\ell((k + k')g) = \omega^{\ell(k+k')} = \omega^{\ell k} \omega^{\ell k'} = \chi_\ell(k) \chi_\ell(k')$$

Ainsi, on a
$$\widehat{\mathrm{G}} = \{\chi_\ell, \ell \in [\![0\,; n-1]\!]\}$$

Pour $(\ell, j) \in [\![0\,; n-1]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned} \chi_j = \chi_\ell \quad &\Longrightarrow \quad \chi_j(1) = \chi_\ell(1) \\ &\Longrightarrow \quad \omega^{j-\ell} = 1 \quad \Longrightarrow \quad j - \ell \in n\mathbb{Z} \cap [\![-(n-1)\,; n-1]\!] \quad \Longrightarrow \quad j = \ell \end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\widehat{n} = \mathrm{Card}\ \{\chi_\ell, \ell \in [\![0\,; n-1]\!]\} = n}$

Remarque : On peut montrer $\mathrm{G} \simeq \widehat{\mathrm{G}}$ en vérifiant que l'application

$$\Psi\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathrm{G}} \\ \quad \bar{j} \quad \longmapsto \chi_j \end{cases}$$

où $j \in \bar{j} \cap [\![0\,;\, n-1]\!]$ est un isomorphisme de groupes. L'application est bien définie car χ_j ne dépend pas du choix d'un représentant de $\bar{j}$ puisque

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \chi_{j+k\ell} = \chi_j$$

Elle est clairement surjective et injective puisque pour $j \in \mathbb{Z}$, on a $\chi_j = \mathbb{1}$ implique $\omega^j = 1$ qui implique $\bar{j} = \bar{0}$. Enfin, on a

$$\forall (j,\ell) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \Psi(\bar{\ell} + \bar{j}) = \Psi(\overline{j+\ell}) = \chi_{j+\ell} = \chi_j \chi_\ell$$

Ainsi
$$\widehat{\mathrm{G}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathrm{G}$$

3.(a) La notation $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ a du sens puisque c'est l'ensemble des morphismes du groupe $(\widehat{\mathrm{G}}, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. L'ensemble $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ est appelé *bidual* de G. Soit $x \in \mathrm{G}$ et $(\varphi, \chi) \in \widehat{\mathrm{G}}^2$. On a

$$\delta_x(\chi\varphi) = (\chi\varphi)(x) = \chi(x)\varphi(x) = \delta_x(\chi)\delta_x(\varphi)$$

D'où
$$\boxed{\forall x \in \mathrm{G} \qquad \delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}}$$

Soit $(x,y) \in \mathrm{G}^2$. On a

$$\forall \chi \in \widehat{\mathrm{G}} \qquad \Phi(x+y)(\chi) = \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) = \Phi(x)(\chi)\Phi(y)(\chi)$$

d'où
$$\forall (x,y,) \in \mathrm{G}^2 \qquad \Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y)$$

On note $\widehat{\widehat{n}} = \mathrm{Card}\, \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$. D'après le résultat de la question 2.(c), on a

$$\widehat{\widehat{n}} \leqslant \widehat{n} \leqslant n$$

Si on établit l'injectivité de Φ, on pourra en déduire $n \leqslant \widehat{\widehat{n}}$ et conclure. On a

$$\Phi \text{ injectif} \iff \mathrm{Ker}\, \Phi = \{0_{\mathrm{G}}\}$$

Soit $x \in \mathrm{G} \smallsetminus \{0_{\mathrm{G}}\}$. On note $d = o(x)$. L'application

$$\chi\colon \begin{cases} \quad \langle x \rangle \quad \longrightarrow \mathbb{C} \\ kx, k \in \mathbb{Z} \longmapsto \omega^k \end{cases}$$

avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{d}}$ est un morphisme de $(\langle x \rangle, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ pour les mêmes raisons que les morphismes χ_ℓ exhibés à la question 2.(d) avec $\ell \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ et c'est un morphisme non trivial puisque $\chi(x) = \omega \neq 1$. Si $d = n$, c'est-à-dire $\mathrm{G} = \langle x \rangle$, c'est terminé. Supposons $\mathrm{H} = \langle x \rangle \subsetneq \mathrm{G}$. Soit $y \in \mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{H}$. On note $\mathrm{K} = \langle \mathrm{H} \cup \{y\} \rangle$. On montre sans difficulté

$$\mathrm{K} = \{h + ky, (h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}\}$$

On pose
$$p = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in \mathrm{H}\}$$

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in \mathrm{H}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $ny = 0_{\mathrm{G}} \in \mathrm{H}$ et l'entier p est donc bien défini. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^p = \chi(py)$. On définit

$$\forall (h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z} \qquad \widetilde{\chi}(h+ky) = \chi(h) z^k$$

On va vérifier que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie et qu'il s'agit bien d'un élément de $\widehat{\mathrm{K}}$ prolongeant $\chi \in \widehat{\mathrm{H}}$. Soit $(h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}$ et $(h',k') \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}$ tels que $h + ky = h' + k'y$. On a

$h - h' = (k' - k)y$. D'après le théorème de la divisions euclidienne, on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\, p-1]\!]$ tels que $k' - k = pq + r$. Ainsi, il vient

$$\underbrace{h - h' - pqy}_{\in \mathrm{H}} = ry$$

Par minimalité de p, il en résulte que $r = 0$ d'où

$$k' = k + pq \quad \text{et} \quad h' = h - pqy$$

Ainsi $\qquad \chi(h')z^{k'} = \chi(h - pqy)z^{k+pq} = \chi(h)z^{-pq}z^{pq}z^k = \chi(h)z^k$

ce qui prouve que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie. Sans difficulté, il vient alors pour (h, k) et (h', k') dans $\mathrm{H} \times \mathbb{Z}$

$$\widetilde{\chi}(h+ky+h'+k'y) = \widetilde{\chi}(h+h'+(k+k')y) = \chi(h+h')z^{k+k'} = \chi(h)z^j\chi(h')z^{k'} = \widetilde{\chi}(h+ky)\widetilde{\chi}(h'+k'y)$$

Par conséquent, on a bien prolongé le morphisme non trivial $\chi \in \widehat{\mathrm{H}}$ en le morphisme également non trivial $\widetilde{\chi} \in \widehat{\mathrm{K}}$. On itère ce processus jusqu'à prolonger χ en morphisme non trivial sur G tout entier et on conclut que l'application Φ est injective. On en déduit $n \leqslant \widehat{\widehat{n}}$ et par conséquent, on a $n = \widehat{\widehat{n}}$ et l'application Φ est donc injective entre deux ensembles finis de même cardinal ce qui prouve qu'elle est bijective. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un isomorphisme de } (\mathrm{G}, +) \text{ vers } (\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, \times).}$$

3.(b) On a montré précédemment $\widehat{\widehat{n}} \leqslant \widehat{n} \leqslant n$ et comme $\widehat{\widehat{n}} = n$, on conclut

$$\boxed{n = \widehat{n}}$$

Variante : On peut montrer ce résultat directement, sans passer par le bidual $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$. Pour $a \in \mathrm{G}$, on pose

$$\forall \chi \in \widehat{\mathrm{G}} \qquad \mathrm{T}_a(\chi) = \chi(\cdot + a)$$

Pour $a \in \mathrm{G}$, l'application T_a à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ est linéaire et bijective d'application réciproque T_{-a}. On pose

$$\Gamma \colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{G}}) \\ a \longmapsto \mathrm{T}_a \end{cases}$$

On observe $\qquad \forall (a, b) \in \mathrm{G}^2 \qquad \Gamma(a + b) = \Gamma(a)\Gamma(b) = \mathrm{T}_a \circ \mathrm{T}_b = \mathrm{T}_b \circ \mathrm{T}_a$

On en déduit $\qquad \forall a \in \mathrm{G} \qquad \mathrm{T}_a^n = \Phi(na) = \Phi(0_{\mathrm{G}}) = \mathrm{id}$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ est annulateur de T_a pour tout $a \in \mathrm{G}$. Comme il s'agit d'un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on en déduit que la famille $(\mathrm{T}_a)_{a \in \mathrm{G}}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ qui commutent. D'après un résultat classique de réduction, il existe une base commune de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ formée de vecteurs propres des T_a pour $a \in \mathrm{G}$. Soit u un tel vecteur propre. On a $\mathrm{T}_a(u) = \lambda(a)u$ pour tout $a \in \mathrm{G}$ d'où

$$\forall (a, x) \in \mathrm{G}^2 \qquad \mathrm{T}_a(u)(x) = \lambda(a)u(x) = u(x + a)$$

S'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $u(g) = 0$, comme $u \neq 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$, on dispose de $h \in \mathrm{G}$ tel que $u(h) \neq 0$ et il vient

$$0 = \lambda(h - g)u(g) = u(h) \neq 0$$

ce qui est absurde. On en déduit que l'application u ne s'annule pas sur u. Enfin pour $(a, b) \in \mathrm{G}^2$, on a

$$\mathrm{T}_{a+b}(u) = \lambda(a+b)u \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{a+b}(u) = u(\cdot + a + b) = \lambda(a)u(\cdot + b) = \lambda(a)\lambda(b)u$$

d'où
$$\lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b)$$

qu'on peut encore écrire
$$\frac{u(a+b)}{u(0)} = \frac{u(a)}{u(0)}\frac{u(b)}{u(0)}$$

et qui prouve que $\chi = \dfrac{u}{u(0)}$ est un caractère. Par conséquent, on dispose d'une famille libre de caractères de cardinal égal à $\dim \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$. Enfin, la famille $\left(\mathbb{1}_{\{g\}}\right)_{g\in\mathrm{G}}$ est une famille libre et génératrice $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ d'où $\dim \mathbb{C}^{\mathrm{G}} = \mathrm{Card}\ \mathrm{G} = n$. Ainsi, on a $\widehat{n} \geqslant n$ et on retrouve donc l'égalité $n = \widehat{n}$.