ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

# Préparation à l'oral - Feuille n°5

## Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

1. (a) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|_1 \leqslant k\|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathrm{E}$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

## Exercice 2 (CCINP 2023)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{A})$.

## Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni de

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] \,\mathrm{d}t$$

On pose $\quad \mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad$ et $\quad \mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} \mid f'' \text{ existe et } f'' = f\}$

1. Justifier que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que W est un sev de E de dimension finie et en donner une base.
3. Établir $$\mathrm{V} \perp \mathrm{W}$$
4. Pour $f \in \mathrm{E}$, déterminer une expression simple de $p_{\mathrm{W}}(f)$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et de la fonction sh.
5. Montrer $$\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}$$

## Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(p_n)_n$ d'application polynomiales telle que la suite $(p_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

## Exercice 5 (Mines 2023)

Pour $n$ entier $\geqslant 2$, on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis montrer sa convergence.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ puis un équivalent simple de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$ ;

## Exercice 6 (Mines 2023)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{E}$$

sur $]\,0\,;+\infty\,[^2$ avec $(u, v) = (xy, x/y)$.

## Exercice 7 (Centrale 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive et donner les propriétés d'une telle matrice.

   On pose $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{A}x, x\rangle - \langle x, b\rangle$$

2. Montrer que la fonction J est *strictement convexe*, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[ \qquad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad \mathrm{J}(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y)$$

3. (a) Établir $$\mathrm{J}(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$$

   (b) En déduire que la fonction J atteint un minimum en unique point de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

## Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_x$ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $x > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x)$ puis établir

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Soit $\alpha$ réel et $u_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$ pour $x$ réel.

2. (a) Préciser le domaine de définition de $u_\alpha$.

   (b) Déterminer $u_1$ et $u_2$.

3. (a) Soit $\alpha < 0$. Montrer $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$

   (b) Soit $\alpha \in \,]-1\,;0\,[$. Établir $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x$