ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral python - Feuille n°1

Exercice 1 (Centrale 2022)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-1}^{1} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

1. Représenter les termes de la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_{n\in[\![100\,;\,500]\!]}$. Qu'observe-t-on ?
   On pose
   $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \in \,]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi(t) = -\frac{1}{t^2}\ln f(t)$$
2. Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en zéro. Que peut-on dire de $\varphi(t)$ lorsque $t \to -1$?
3. À l'aide de l'outil informatique, établir l'existence de $a > 0$ tel que
   $$\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) \geqslant a$$
   On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$
4. Établir $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$
5. En déduire $$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$
   On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_n = \int_{1}^{+\infty} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
6. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1} (\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$$
7. Établir $$\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}_n)$$
   Retrouver la formule de Stirling.

Exercice 2 (Centrale 2022)

Un *nombre de Carmichael* est un entier $n \geqslant 2$ non premier tel que
$$\forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a\ [n]$$

1. Soit $n \geqslant 2$ non premier tel que
   $$\forall a \in [\![0\,;\,n-1]\!] \qquad a^n \equiv a\ [n]$$
   Montrer que n est un nombre de Carmichael.
2. Écrire une fonction `carmichael(n)` d'argument `n` entier qui renvoie `True` si n est un nombre de Carmichael et `False` sinon.

3. Déterminer à l'aide de l'outil informatique le plus petit nombre de Carmichael.
4. Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $r \geqslant 2$ et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts vérifiant $p_i - 1 | n - 1$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$.

   (a) Montrer $\qquad \forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a \ [p_i]$

   (b) Montrer que n est un nombre de Carmichael.

5. Soit n un nombre de Carmichael. Montrer que n est un produit de nombres premiers deux à deux distincts.
6. Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe abélien fini.

   (a) Soient x, y dans G avec $o(x) \wedge o(y) = 1$. Montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.

   (b) Soit $x \in \mathrm{G}$. Pour d diviseur de $o(x)$, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre d.

   (c) Soit m l'ordre maximal des éléments de G. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m.

   (d) En déduire $\qquad \forall p \in \mathcal{P} \qquad \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

7. Soit n un nombre de Carmichael et p un diviseur premier de n. Montrer que $p - 1 | n - 1$.

Exercice 3 (Centrale 2019)

On effectue n lancers de pièces indépendants et la probabilité d'obtenir pile au k-ième lancer est notée p_k. On note X_n le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers et π_n la probabilité que X_n soit pair.

1. (a) Écrire une fonction `pi(n,p)` qui donne une estimation de π_n pour la fonction p. Elle doit effectuer 1000 simulations.

   (b) Représenter π_n en fonction de $n \in [\![0 \,;\, 100]\!]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$.

   (c) Représenter π_{100} en fonction de $\alpha \in [\,0\,;6\,]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^\alpha}$.

2. Exprimer π_n en fonction des p_k. On pourra considérer la suite $u_n = \pi_n - \dfrac{1}{2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_n$ quand $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$. Que se passe-t-il quand la pièce est équilibrée ?
4. Montrer que si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier, alors $(\pi_n)_n$ tend vers une limite $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

   Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la série $\sum p_n$ diverge.