Exercice 1 (Mines 2022)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.

1. Soit n entier. On suppose

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad \int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$$

   Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

2. On suppose $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$

   Montrer que $f = 0$.

Corrigé : 1. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t$ avec $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$ sont bien définies comme intégrales de fonctions continues sur un segment. Par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On suppose que f s'annule moins de $n+1$ fois. On note $x_1, \ldots, x_r$ les racines de f avec changement de signe (ce qui suppose $x_i \in \,]\,0\,;1\,[$ pour $i \in [\![\,1\,;\,r\,]\!]$). On a $r \leqslant n$. On considère $\mathrm{Q} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - x_i)$ et $\mathrm{Q} = 1$ si f ne s'annule pas avec changement de signe. Par construction, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{Q}(t)$ est de signe constant et continue sur $[\,0\,;1\,]$. Or, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puisque $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Par séparation, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \setminus \mathrm{Q}^{-1}(\{0\}) \qquad f(t) = 0$$

avec $\mathrm{Q}^{-1}(\{0\})$ ensemble fini (éventuellement vide). On en déduit $f = 0$ puisque f s'annule également en $\mathrm{Q}^{-1}(\{0\})$ et ceci contredit le fait que f s'annule moins de $n+1$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois.}}$$

Variante : On peut procéder par récurrence en renforçant la localisation des racines dans $]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Pour n entier, on pose $\mathscr{P}(n)$ l'implication suivante

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad \int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois sur }]\,0\,;1\,[$$

Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Si f ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$, alors, comme elle est continue, elle est de signe constant sur $[\,0\,;1\,]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires et par séparation, il vient $f = 0$ ce qui contredit l'hypothèse et prouve $\mathscr{P}(0)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier. Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. On pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0 et elle est en particulier de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$\mathrm{F}(1) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Puis, pour $k \in [\![1\,;\,n+1]\!]$, les fonctions F et $t \mapsto t^k$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il vient en intégrant par parties

$$\int_0^1 f(t)t^k \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)t^k\right]_0^1 - k\int_0^1 \mathrm{F}(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$\forall k \in [\![1\,;\,n+1]\!] \qquad \int_0^1 \mathrm{F}(t)t^{k+1}\,\mathrm{d}t = 0$$

Par hypothèse de récurrence, la fonction F s'annule en $x_1 < \ldots < x_{n+1}$ et aussi en $x_0 = 0$ et $x_{n+2} = 1$ et en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $]\,x_k\,;x_{k+1}\,[$, on en déduit que la fonction $f = \mathrm{F}'$ s'annule en $n+2$ points intérieurs ce qui clôt la récurrence.

2. Par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\left[f(t) - \mathrm{P}(t) + \mathrm{P}(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\left[f(t) - \mathrm{P}(t)\right]\,\mathrm{d}t \leqslant \|f - \mathrm{P}\|_\infty \|f\|_\infty$$

d'où
$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty$$

et comme ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ avec f^2 continue et positive sur $[\,0\,;1\,]$. Par séparation, on conclut

$$\boxed{f = 0}$$

Exercice 2 (Mines 2019)

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, non nulle, telle que $f^3 + f = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Pour n entier non nul, que dire de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ si $f^3 + f = 0$?

Corrigé : 1. On a $\mathrm{X} \wedge (\mathrm{X}^2 + 1) = 1$. Ainsi, d'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\ f \circ (f^2 + \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$$

On a $\chi_f = \mathrm{X}^3 + \ldots$ d'où $\chi_f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\chi_f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. La fonction $x \mapsto \chi_f(x)$ est continue car polynomiale et admet donc une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Notant $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} f$, le polynôme $\mathrm{X}(\mathrm{X}+\mathrm{i})(\mathrm{X}-\mathrm{i})$ est annulateur de A, scindé à racines simples d'où la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. La matrice A est non nulle donc admet i ou $-\mathrm{i}$ comme racine et comme le polynôme χ_{A} est dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, s'il admet une racine complexe, son conjugué l'est aussi. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ et on en déduit notamment que $m_0(\mathrm{A}) = 0$ d'où $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = \dim \mathrm{Ker}\ f = 1$. Le sev $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$ est stable par f puisque f et $f^2 + \mathrm{id}$ commutent et on note $g = f_{\mathrm{Ker}\,(f^2+\mathrm{id}\,)}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,) \smallsetminus \{0\}$. Montrons que $(x, g(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$. Soient α, β réels tels que $\alpha x + \beta g(x) = 0_{\mathrm{E}}$. On applique g et comme $g^2 + \mathrm{id} = 0$, on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha x + \beta g(x) = 0_{\mathrm{E}} \\ -\beta x + \alpha g(x) = 0_{\mathrm{E}} \end{cases}$$

Avec $\alpha \mathrm{L}_1 - \beta \mathrm{L}_2$, on obtient $(\alpha^2 + \beta^2) x = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $\alpha = \beta = 0$ ce qui prouve la liberté de $(x, g(x))$. Par ailleurs, on a $\dim \mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,) = 2$ et ceci établit que la famille $(x, g(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$. En complétant celle-ci par une base du noyau qui est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. Comme précédemment, on a

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$$

et on considère $g = f_{\mathrm{Ker}\,(f^2+\mathrm{id}\,)}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$. Si $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,) = \{0_{\mathrm{E}}\}$, il n'y a rien à faire. Sinon, on choisit $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,) \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. La famille $(x_1, g(x_1))$ est libre pour les mêmes raisons qu'avant et le plan $\mathrm{Vect}\,(x_1, g(x_1))$ est stable par g puisque $g^2(x_1) = -x_1$. On peut donc considérer l'endomorphisme g_1 induit par g sur $\mathrm{Vect}\,(x_1, g(x_1))$ puis itérer l'algorithme de construction d'une famille $(x_1, g_1(x_1), x_2, g_2(x_2), \ldots)$, algorithme qui se termine puisque l'espace $\mathrm{Ker}\,(f^2 + \mathrm{id}\,)$ est de dimension finie. En considérant une base obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}\ f$ et de $(x_1, g_1(x_1), \ldots)$, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{B}) \text{ avec } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 3 (Centrale 2022)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel défini par $\langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{V})$ pour $(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathrm{E}^2$. On pose

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{M}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{T}_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$$

1. On suppose A nilpotente. Établir $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_\mathrm{A} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^\top)^\perp$.
2. Montrer $$(\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A})^\perp = \mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top}$$
3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{A} \in \mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A}$.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_\mathrm{A}$. On a $\mathrm{AM} = \mathrm{MA}$ et par commutation, il vient $(\mathrm{AM})^n = \mathrm{A}^n \mathrm{M}^n = 0$ d'où AM nilpotente et donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Par conséquent, on a $\left\langle \mathrm{A}^\top, \mathrm{M} \right\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = 0$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_\mathrm{A} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}^\top)^\perp}$$

2. On a en utilisant la propriété fondamentale de la trace

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} \in (\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A})^\perp &\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{AV} - \mathrm{VA} \rangle = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{AV}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{VA}) = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^\top \mathrm{AV}) - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AU}^\top \mathrm{V}) = 0 \\
&\iff \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \qquad \left\langle \left(\mathrm{U}^\top \mathrm{A} - \mathrm{AU}^\top\right)^\top, \mathrm{V} \right\rangle = 0 \\
\mathrm{U} \in (\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A})^\perp &\iff \mathrm{U}^\top \mathrm{A} - \mathrm{AU}^\top = 0
\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{(\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A})^\perp = \mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top}}$$

3. L'espace E étant euclidien, pour tout sev F de E, on a $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A} = \left((\mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A})^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top})^\perp$$

On suppose A nilpotente. Sa transposée l'est aussi et d'après le résultat de la première question, on obtient $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})^\perp$. Par conséquent

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) = \left(\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})^\perp\right)^\perp \subset (\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}^\top})^\perp = \mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A}$$

Réciproquement, soit $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{T}_\mathrm{A}(\mathrm{B})$. On a $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$ d'où $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{ABA} = \mathrm{A}^2$ puis $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - (\mathrm{BA} + \mathrm{A})\mathrm{A} = \mathrm{A}^2$ d'où $\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{BA}^2 = 2\mathrm{A}^2$. On peut conjecturer $\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k = k\mathrm{A}^k$ pour k entier. On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 0$ puis on la suppose vraie pour k entier. Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k) = k\mathrm{A}^{k+1} &\implies \mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - (\mathrm{BA} + \mathrm{A})\mathrm{A}^k = k\mathrm{A}^{k+1} \\
&\implies \mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{BA}^{k+1} = (k+1)\mathrm{A}^{k+1}
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On a établi

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad -\mathrm{T}_\mathrm{B}(\mathrm{A}^k) = k\mathrm{A}^k$$

Si A^k est non nulle pour tout k entier, l'endomorphisme $-\mathrm{T}_\mathrm{B}$ admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{A nilpotente si et seulement si } \mathrm{A} \in \mathrm{Im}\ \mathrm{T}_\mathrm{A}}$$

Exercice 4 (Mines-Telecom 2022)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction k-lipschitzienne avec $k \in [\,0\,;1\,[$.

1. Montrer que la fonction f admet un point fixe.
2. Montrer que ceci est faux si on suppose seulement

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Corrigé : 1 . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant k\,|x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\,|x_1 - x0|$$

La série $\sum k^n$ converge d'où la convergence absolue et donc la convergence de la série téléscopique $\sum [x_{n+1} - x_n]$. On en déduit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et comme la fonction f est continue, il vient en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ l'égalité $f(\ell) = \ell$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un point fixe.}}$$

2. On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$. On a

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} = \frac{x^2+1-(y^2+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$$

d'où $$|f(x) - f(y)| = |x-y|\,\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} < |x-y|\,\frac{|x|+|y|}{|x|+|y|}$$

c'est-à-dire $$|f(x) - f(y)| < |x-y|$$

et la fonction f n'admet clairement pas de point fixe. On conclut

$$\boxed{\text{Le résultat est faux avec en supposant seulement strictement 1-lipschitzienne.}}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2022)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AU}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$$

Corrigé : D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$ tels que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. Avec la propriété fondamentale de la trace, on obtient

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AU}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PDP}^\top\mathrm{U}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{DV}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{V} = \mathrm{PUP}^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

On trouve
$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{DV}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i}$$

Comme les colonnes de V constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a en particulier $v_{i,i} \leqslant 1$ et en multipliant par $\lambda_i \geqslant 0$, on trouve $\lambda_i v_{i,i} \leqslant v_{i,i}$ et par sommation

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AU}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Exercice 6 (Mines-Telecom 2018)

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé non compact d'intérieur vide.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ image réciproque d'un ouvert par l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ continue car polynomiale en les coordonnées de la matrice ce qui prouve l'ouverture de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}$ et comme χ_{M} admet un nombre fini de racines, on a $\chi_{\mathrm{M}}\left(\dfrac{1}{p}\right) \neq 0$ pour p suffisamment grand ce qui signifie exactement que $\mathrm{M} - \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. L'indice de nilpotence est majoré par n. Notant $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^n$ continue par continuité du produit matriciel, on a $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(k\mathrm{E}_{1,n})_k$ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ et non bornée. Enfin, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{N}$, on a par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que $\mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il en résulte qu'aucune boule ouverte n'est incluse dans $\mathcal{N}$ puisque les matrices nilpotentes sont non inversibles. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N} \text{ est un fermé non compact d'intérieur vide.}}$$

Exercice 7 (Mines 2018)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $\mathrm{A} = \operatorname{Com} \mathrm{M}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : On a $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{M}\operatorname{Com} \mathrm{M}^\top = \operatorname{Com} \mathrm{M}^\top \mathrm{M} = (\det \mathrm{M})\mathrm{I}_n$

Si M est inversible, alors $\operatorname{Com} \mathrm{M}$ l'est aussi avec $\operatorname{Com} \mathrm{M} = (\det \mathrm{M}) \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}$. Si $\operatorname{rg} \mathrm{M} = n-1$, alors $\operatorname{Com} \mathrm{M}^\top \mathrm{M} = 0$ implique $\operatorname{Im} \mathrm{M} \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Com} \mathrm{M}^\top$ d'où $\dim \operatorname{Ker} \operatorname{Com} \mathrm{M}^\top \geqslant n-1$, *i.e.* $\operatorname{rg} \operatorname{Com} \mathrm{M}^\top = \operatorname{rg} \operatorname{Com} \mathrm{M} \leqslant 1$. Or, si $\operatorname{rg} \mathrm{M} = n-1$, il existe une matrice extraite de M d'ordre $n-1$ inversible d'où la présence d'un cofacteur non nul dans $\operatorname{Com} \mathrm{M}$ ce qui prouve $\operatorname{Com} \mathrm{M} \neq 0$ et donc $\operatorname{rg} \operatorname{Com} \mathrm{M} \geqslant 1$. Enfin, si $\operatorname{rg} \mathrm{M} \leqslant n-2$, alors toute matrice extraite de M d'ordre $n-1$ est non inversible d'où $\operatorname{Com} \mathrm{M} = 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \operatorname{rg} \operatorname{Com} \mathrm{M} = \begin{cases} n & \text{si } \operatorname{rg} \mathrm{M} = n \\ 1 & \text{si } \operatorname{rg} \mathrm{M} = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

On en déduit

$\boxed{\text{Si } \operatorname{rg} \mathrm{A} \notin \{0,1,n\}\text{, l'équation } \mathrm{A} = \operatorname{Com} \mathrm{M} \text{ n'admet pas de solutions. Si } \operatorname{rg} \mathrm{A} = 0\text{, alors toute matrice M avec } \operatorname{rg} \mathrm{M} \leqslant n-2 \text{ est solution.}}$

Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on cherche une solution $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{A} = \operatorname{Com} \mathrm{M} \quad \Longrightarrow \quad \det \mathrm{A} = \det(\operatorname{Com} \mathrm{M}) = (\det \mathrm{M})^{n-1}$$

Si $\det \mathrm{A} > 0$ ou si n est pair, alors on peut expliciter $\det \mathrm{M} = (\det \mathrm{A})^{\frac{1}{n-1}}$ et il vient

$$\mathrm{A} = \operatorname{Com} \mathrm{M} = (\det \mathrm{M}) \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1} \iff \mathrm{M} = (\det \mathrm{A})^{\frac{1}{n-1}} \left(\mathrm{A}^\top\right)^{-1}$$

Si $\det \mathrm{A} < 0$ et n impair, l'équation $x^{n-1} = \det \mathrm{A}$ n'ayant pas de solution, on conclut

$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\text{, l'équation } \mathrm{A} = \operatorname{Com} \mathrm{M} \text{ admet une solution si et seulement si } \det \mathrm{A} > 0 \text{ ou } n \text{ pair et dans ce cas, celle-ci est donnée par } \mathrm{M} = (\det \mathrm{A})^{\frac{1}{n-1}} \left(\mathrm{A}^\top\right)^{-1}.}$

Pour traiter le cas d'une matrice de rang égal à 1, on commence par énoncer une propriété remarquable sur la comatrice. On a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \operatorname{Com} \mathrm{M} = (\det \mathrm{M}) \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}$$

Par suite $\qquad \forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \operatorname{Com}(\mathrm{MN}) = (\operatorname{Com} \mathrm{M}) (\operatorname{Com} \mathrm{N})$

Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et continuité de $\mathrm{X} \mapsto \operatorname{Com} \mathrm{X}$ (polynomiale en les coefficients), on trouve

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \operatorname{Com}(\mathrm{MN}) = (\operatorname{Com} \mathrm{M}) (\operatorname{Com} \mathrm{N})}$$

Supposons $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$. Il existe P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_1\mathrm{Q}$. On vérifie sans difficulté que $\operatorname{Com}(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_1) = \mathrm{J}_1$. Considérons les écritures par blocs avec un bloc 1×1 en haut à gauche $\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ et $\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} u & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{X} & \mathrm{Y} \end{array}\right)$. On trouve

$$\mathrm{PJ}_1\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} u & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{X} & \mathrm{Y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} au & a\mathrm{V} \\ \hline \mathrm{C}u & \mathrm{CV} \end{array}\right)$$

Le résultat est indépendant des $n-1$ dernières colonnes de P et des $n-1$ dernières lignes de Q. Quitte à changer le signe d'une de ses lignes ou colonnes, on peut supposer P et Q de déterminant

> 0. Ainsi, d'après les résultats précédents, il existe R et S dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Com}\,\mathrm{R} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{Com}\,\mathrm{S} = \mathrm{Q}$ et par conséquent

$$\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_1\mathrm{Q} = (\mathrm{Com}\,\mathrm{R})(\mathrm{Com}(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_1))(\mathrm{Com}\,\mathrm{S}) = \mathrm{Com}(\mathrm{R}(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_1)\mathrm{S})$$

$$\boxed{\text{Si rg A} = 1\text{, l'équation A} = \mathrm{Com}\,\mathrm{M}\text{ admet une solution.}}$$

Exercice 8 (Centrale 2021)

Soit $(\mathrm{U}_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{U}_0 = 1, \qquad \mathrm{U}_1 = 2\mathrm{X}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{U}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$$

1. (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de U_n.

   (b) Montrer $\qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \sin(\theta)\mathrm{U}_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$

   (c) Déterminer une expression factorisée de U_n.

2. Pour n entier non nul, étudier les racines rationnelles de $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n\left(\dfrac{\mathrm{X}}{2}\right)$.

3. Soient k, n entiers non nuls. Étudier l'irrationalité de $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

Corrigé : 1.(a) On peut conjecturer que pour n entier, on a $\deg \mathrm{T}_n = n$ avec pour coefficient dominant 2^n et même parité que n . Prouvons cela par une récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n) : \quad \mathrm{T}_n = 2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$$

• $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1)$: l'initialisation est immédiate.

• $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 1. Par suite

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1} &= 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1} \\
&= 2\mathrm{X}\left(2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n\right) - \mathrm{T}_{n-1} \\
\mathrm{T}_{n+1} &= 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + [2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}]
\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{Q}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\deg \mathrm{Q}_{n+1} &\leqslant \max\left(\deg 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n, \deg \mathrm{T}_{n-1}\right) \\
&\leqslant \max(1 + n - 1, n - 1) = n < n + 1
\end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{n-1}(-\mathrm{X}) \\
&= 2(-1)^{n+1}\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) - (-1)^{n-1}\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

le dernière égalité résultant de l'égalité $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}_n = 2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})}$$

1.(b) On peut déjà signaler que le sinus ne s'annule pas sur $]\,0\,;\pi\,[$. On procède encore par récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall \theta \in\,]\,0\,;\pi\,[\quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

• $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1)$: Soit $\theta \in\,]\,0\,;\pi\,[$. Par trigonométrie, on a

$$\mathrm{T}_0(\cos\theta) = 1 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} \qquad \mathrm{T}_1(\cos\theta) = 2\cos\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$$

L'initialisation est vérifiée.

• $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 1. Par suite, pour $\theta \in\,]\,0\,;\pi\,[$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\,\mathrm{T}_n(\cos\theta) - \mathrm{T}_{n-1}(\cos\theta) \\
&= \frac{2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin\theta} \\
&= \frac{2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - [\sin((n+1)\theta)\cos\theta - \sin\theta\cos((n+1)\theta)]}{\sin\theta} \\
\mathrm{T}_{n+1}(\cos\theta) &= \frac{\cos\theta\sin((n+1)\theta) + \sin\theta\cos((n+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc montré

$$\boxed{\forall(n,\theta) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;\pi\,[\qquad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}}$$

1.(c) Soit n entier. D'après la propriété établie précédemment, on a pour $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0 &\iff \sin((n+1)\theta) = 0 \\
&\iff (n+1)\theta \in \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\
\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0 &\iff \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \,]\,0\,;\pi\,[= \left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\}
\end{aligned}$$

L'application $\theta \mapsto \cos\theta$ est injective sur $]\,0\,;\pi\,[$ car strictement décroissante et par conséquent, des valeurs deux à deux distinctes de $]\,0\,;\pi\,[$ ont des images par la fonction cos qui sont également deux à deux distinctes d'où

$$\mathrm{Card}\,\left\{\frac{k\pi}{n+1},\ k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\} = \mathrm{Card}\,\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]\right\} = n$$

Ainsi, les $\mathrm{X} - \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ divisent T_n et sont premiers entre eux d'où

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] \text{ divise } \mathrm{T}_n$$

Or
$$\deg\prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] = n = \deg\mathrm{T}_n$$

et comme 2^n est le coefficient dominant de T_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}_n = 2^n\prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]}$$

2. On a $\qquad \mathrm{V}_0 = 1, \qquad \mathrm{V}_1 = \mathrm{X}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{V}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{V}_n$

Par récurrence double, on montre que V_n est unitaire dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ pour tout n entier. Soit n entier non nul. On note $\mathrm{V}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$ avec $a_n = 1$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tel que $\mathrm{V}_n\,(p/q) = 0$.

On en déduit
$$q^n\mathrm{V}_n\,(p/q) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

d'où
$$p^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = q\left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k}\right)$$

ce qui prouve $q|p^n$. Or, on a $p \wedge q = 1$ d'où $p^n \wedge q = 1$ et il en résulte que $q = 1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, les racines rationnelles de } \mathrm{V}_n \text{ sont des entiers relatifs.}}$$

3. Soient k, n entiers non nuls. Si $n+1$ divise k, le résultat est trivial. Supposons $n+1 \notin k\mathbb{Z}$. D'après le théorème de la division euclidienne, on dispose de q entier et $r \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $k=(n+1)q+r$. Il vient

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \cos\left(q\pi + \frac{r\pi}{n+1}\right) = (-1)^q \cos\left(\frac{r\pi}{n+1}\right)$$

et on peut donc restreindre l'étude à $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On a clairement

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \in \mathbb{Q} \iff 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \in \mathbb{Q}$$

D'après l'expression factorisée de T_n, on constate que $2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est racine du polynôme. Si $2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est rationnel, alors il est entier relatif d'après le résultat de la question précédente. Comme $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, l'argument $\dfrac{k\pi}{n+1}$ est dans $]\,0\,;\pi\,[$ et par conséquent $2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \in \{-1, 0, 1\}$ d'où

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Puis
$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0 \iff \frac{k\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2} \iff 2k = n+1$$

et
$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \pm\frac{1}{2} \iff \frac{k\pi}{n+1} \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\} \iff 3k \in \{n+1, 2(n+1)\}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Si } n+1 \text{ divise } k \text{ ou si } n+1 \text{ ne divise pas } k \text{ et } n+1 \text{ pair ou multiple de 3, alors } \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \text{ est rationnel.}}$$

Exercice 9 (Mines 2017)

Montrer qu'il existe $\mathrm{C}>0$ tel que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}}$$

Corrigé : On a
$$\ln\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Avec le développement limité usuel

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\mathrm{O}(u^3)$$

il vient
$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+\sum_{k=2}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

D'après le théorème sur les séries alternées et le critère de Riemann, on a

$$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \sum\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ convergent}$$

En considérant la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2}[u_n-u_{n-1}]$ avec $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ pour n entier non nul, on établit

$$u_n-u_{n-1}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série téléscopique $\sum\limits_{n\geqslant 2}[u_n-u_{n-1}]$ et donc la convergence de la suite u_n.

Ainsi
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+\sum_{k=2}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln n+\mathrm{C^{te}}+\mathrm{o}(1)$$

Et en passant à l'exponentielle

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{C^{te}}+\mathrm{o}(1)}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C}>0}$$

Exercice 10 (Centrale 2022)

On considère un point qui est libre de se déplacer selon l'axe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. À chaque étape, le point se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité p ou vers la gauche avec probabilité $1-p$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Le point se situe initialement en position 0. On note S_n la variable aléatoire qui indique la position du point au bout de n mouvements.

1. Déterminer la loi de S_n pour tout n entier.
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)$ pour n entier et $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$. Justifier que f est définie sur $]-1\,;1\,[$ et calculer $f(t)$ pour $t \in \,]-1\,;1\,[$.
3. On introduit la variable aléatoire T qui indique le rang du premier retour à l'origine avec la convention que $\mathrm{T} = +\infty$ si le point n'y repasse jamais. On note $q_n = \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ pour n entier non nul et $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} q_n t^n$. Justifier que g est définie sur $]-1\,;1\,[$ et établir

$$\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$

En déduire l'expression de q_n pour n entier non nul.

Corrigé : 1. On note X_i le déplacement du pion à l'instant i. La suite $(\mathrm{X}_i)_{i\geqslant 1}$ est constituée de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = -1) = 1-p$ et on a $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour tout n entier. Les variables $\dfrac{1+\mathrm{X}_i}{2}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$ d'où $\mathrm{U}_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1+\mathrm{X}_i}{2} \sim \mathscr{B}(n,p)$. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 2k-n) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Remarque : En particulier, on observe que $\mathrm{S}_n(\Omega) = \{k \in [\![-n\,;\, n]\!] \mid k+n \in 2\mathbb{N}\}$.

2. On a $0 \leqslant p_n \leqslant 1$ pour tout n entier. Par suite, le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n t^n$ est $\geqslant 1$. Soit $t \in \,]-1\,;1\,[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p)t^2)^n$$

Par ailleurs, en complétant les produits à la Wallis, il vient

$$\begin{aligned} \forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} \end{aligned}$$

On a $4p(1-p) \in [\,0\,;1\,]$ d'où $4t^2 p(1-p) \in [\,0\,;1\,[$ pour $t \in \,]-1\,;1\,[$ et on conclut

$$\boxed{\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2 p(1-p)}}}$$

3. On a

$$\mathrm{T} = \mathrm{Inf}\ \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{S}_n = 0\}$$

Soit n entier non nul. On observe

$$\{\mathrm{T} = n\} = \{\mathrm{S}_n = 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{\mathrm{S}_k \neq 0\}$$

En particulier, pour n entier, on a $\{\mathrm{T}=2n+1\} \subset \{\mathrm{S}_{2n+1}=0\}$ qui est impossible. Puis, pour n entier non nul, il vient en considérant le premier retour à l'origine en $2k$ avec $k \in [\![0\,;\, n]\!]$

$$\begin{aligned}\{\mathrm{S}_{2n}=0\} &= \{\mathrm{S}_{2n}=0\} \cap \bigsqcup_{k=1}^{2n} \{\mathrm{T}=k\} = \{\mathrm{S}_{2n}=0\} \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} \{\mathrm{T}=2k\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \left\{\mathrm{T}=2k, \mathrm{S}_{2k} + \sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \{\mathrm{T}=2k\} \cap \left\{\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\}\end{aligned}$$

Les événements $\{\mathrm{T}=2k\}$ et $\left\{\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\}$ sont indépendants et il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T}=2k)\mathbb{P}\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T}=2k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2(n-k)}=0) = \sum_{k=1}^{n} q_{2k} p_{2(n-k)}$$

En complétant par $q_0 = 0$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad p_{2n} = \sum_{k=0}^{n} q_{2k} p_{2(n-k)}$$

On considère $u : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^n$ et $v : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n} t^n$ dont le rayon de convergence est $\geqslant 1$. On a avec la complétion $q_0 = 0$

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad u(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} t^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{2k} p_{2(n-k)}\right) t^n$$

Par produit de Cauchy de séries entières, il vient

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad u(t) = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n} t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^n\right) = 1 + u(t)v(t)$$

Il s'ensuit $\qquad \forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad u(t^2) = 1 + u(t^2)v(t^2)$

C'est-à-dire $\qquad \boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad f(t) = 1 + f(t)g(t)}$

La fonction f croît sur $\left[0\,;1\right[$ comme somme (infinie) de fonctions croissantes d'où $f(t) \geqslant f(0) = 1 > 0$ pour $t \in \left[0\,;1\right[$ puis

$$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad g(t) = 1 - \frac{1}{f(t)} = 1 - \sqrt{1-4t^2 p(1-p)}$$

En procédant comme à la question 2, on trouve

$$\forall t \in \left[-1\,;1\right[\qquad \sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n} t^n$$

d'où $\qquad \forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n}{(2n-1)} = \frac{p_{2n}}{2n-1}}$$

Exercice 11 (Mines-Ponts 2019)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$.

1. Quelle est la nature de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$?
2. Quel est le signe de I lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$?

Corrigé : 1. Comme P' n'admet qu'un nombre fini de racines, on dispose de $a \geqslant 0$ tel que $\mathrm{P}'(t) \neq 0$ pour tout $t \geqslant a$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{P}'(t)}$ et $t \mapsto -\cos(\mathrm{P}(t))$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et le crochet $\left[-\dfrac{\cos(\mathrm{P}(t))}{\mathrm{P}'(t)}\right]_a^{+\infty}$ est fini puisque $\deg \mathrm{P}' \geqslant 1$ ce qui garantit $\mathrm{P}'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pm\infty$. D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_a^{+\infty} \sin(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{P}'(t)\sin(\mathrm{P}(t))}{\mathrm{P}'(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{P}''(t)\cos(\mathrm{P}(t))}{\mathrm{P}'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. On a

$$\deg \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}'^2} = \deg \mathrm{P}'' - \deg \mathrm{P}'^2 = \deg \mathrm{P} - 2 - 2(\deg \mathrm{P} - 1) = -\deg \mathrm{P}$$

d'où
$$\frac{\mathrm{P}''(t)\cos(\mathrm{P}(t))}{\mathrm{P}'(t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{P}''(t)\cos(\mathrm{P}(t))}{\mathrm{P}'(t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto 1-\cos(t^2)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Le crochet $\left[\dfrac{1-\cos(t^2)}{2t}\right]_0^{+\infty}$ est fini car

$$\frac{1-\cos(t^2)}{2t} \underset{t\to 0}{=} \frac{\mathrm{O}(t^2)}{2t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t^2)}{2t} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{O}(1)}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

En intégrant par parties, il vient avec convergence des intégrales concernées

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t^2)}{2t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrande de la deuxième intégrale est positif et on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$$

Remarque : On peut aussi procéder au changement de variables $u = t^2$ et transformer l'intégrale en somme de série alternée mais c'est plus laborieux.

Exercice 12 (Centrale 2021)

1. Rappeler et démontrer le théorème de limite monotone.
2. On pose $a_0 \in]\,0\,;\pi\,[$ et $a_{n+1} = \sin a_n$ pour n entier. Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $(u_n)_n$ suite réelle qu'on suppose décroissante. Si $(u_n)_n$ est minorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k$ et sinon $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Supposons $(u_n)_n$ non minorée. Pour m réel, on dispose d'un seuil N entier tel que $u_n \leqslant m$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, autrement dit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Supposons $(u_n)_n$ minorée. La borne inférieure est donc finie. Par caractérisation de cette borne inférieure, pour $\varepsilon > 0$, on dispose d'un seuil N entier tel que

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k \leqslant u_{\mathrm{N}} < \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k + \varepsilon$$

Par décroissance de $(u_n)_n$, il s'ensuit

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k \leqslant u_n \leqslant u_{\mathrm{N}} < \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k + \varepsilon$$

ce qui prouve

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}\, u_k$$

2. Par récurrence immédiate, on établit $a_n \in]\,0\,;\pi\,]$ pour tout n entier. Après étude de fonction, on obtient

$$\forall x \in]\,0\,;\pi\,] \qquad \sin(x) < x$$

et on en déduit la décroissance de $(a_n)_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_n$ est décroissante minorée donc convergente. On a $a_{n+1} = \sin a_n$ avec la fonction sin continue sur l'intervalle fermé $[\,0\,;\pi\,]$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ est point fixe de sin sur $[\,0\,;\pi\,]$. Or, on a

$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \sin x = x \iff x = 0$$

Ainsi

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

La série téléscopique $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \sum\left[\ln a_{n+1} - \ln a_n\right]$ converge si et seulement si la suite $(\ln a_n)_n$ admet une limite finie. On a $\ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ et on en déduit la divergence de $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Par ailleurs, comme $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il vient

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2)\right) = -\frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a_n^2}{6} < 0$$

D'après le critère des équivalentes (licite, signe constant), les séries $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et $\sum a_n^2$ sont de même nature et d'où la divergence de $\sum a_n^2$. Enfin, on a $a_n \in]\,0\,;1\,]$ pour tout n entier non nul d'où

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n^2 \leqslant a_n$$

Par comparaison, on conclut $\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ diverge.}}$

Comme la suite $(a_n)_n$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées et converge donc. Ainsi, la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence noté R converge pour $x = -1$ d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$ et diverge pour $x = -1$ d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$. On conclut

$$\boxed{\text{La série entière } \sum a_n x^n \text{ a un rayon de convergence égal à 1.}}$$

3. Un développement limité donne

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \sin a_n = a_n - \frac{a_n^3}{6} + \mathrm{o}(a_n^3)$$

On cherche α réel tel que la suite $\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right)_n$ admette une limite finie non nulle. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= \left(a_n - \frac{a_n^3}{6} + \mathrm{o}(a_n^3)\right)^\alpha - a_n^\alpha \\
&= a_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \\
a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= a_n^\alpha \left(1 - \alpha\frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2) - 1\right) = a_n^{\alpha+2}\left(-\frac{\alpha}{6} + \mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha = -2$ et il vient $\qquad a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3}$

D'après le théorème de Césaro, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right] = \frac{1}{n}\left(a_n^{-2} - a_0^{-2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

et comme $\qquad a_n^{-2} - a_0^{-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^{-2}$

On conclut $\qquad \boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}}$