Oral blanc jeudi 13 juin 2024 (13h)

1 Orthogonal d'un sev de polynômes *(Mines Ponts)*

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$.

1. Trouvez $F^\perp$ et vérifier que l'on n'a pas $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans F tel que $d(1, F) = ||1 - P||$.

---

2 Somme de Riemann *(Mines Ponts)*

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Oral blanc jeudi 13 juin 2024 (13h) – Correction

1 Orthogonal d'un sev de polynômes

1. **Trouvez $F^\perp$ et vérifier que l'on n'a pas $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}[X]$.**
   Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ dans $F^\perp$. Alors, pour tout $Q \in F$, on a $\langle P, Q \rangle = 0$.
   Prenons en particulier $Q = 1 - X^k$, on a alors : $a_0 - a_k = 0$. Donc la suite (a_n) est constante, nulle à partir d'un certain rang, donc nulle. Donc $\boxed{F^\perp = \{0\}}$.
   Or $F \neq \mathbb{R}[X]$, donc on n'a pas $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}[X]$.
2. **Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans F tel que $d(1, F) = ||1 - P||$.**
   Montrons que $d(1, F) = 0$. Posons $P_n = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X^k$. On a bien $P(1) = 0$, donc $P \in F$, et :
   $$||1 - P_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc $d(1, F) = 0$.
   Supposons alors qu'il existe $P \in F$ tel que $||1 - P|| = d(1, F)$. On aurait alors $||1 - P|| = 0$, donc $P = 1$.
   Mais $1 \notin F$, donc c'est absurde.

---

2 Somme de Riemann

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

- Commencons par étudier la convergence de $v_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n}$.

  Cette suite converge vers $\int_0^1 x \sin(x) dx$ car c'est une somme de Riemann associée à la fonction continue $f : x \mapsto x \sin(x)$.
  De plus, par intégration par parties avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\cos(x)$, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$:
  $$\int_0^1 x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x) dx = -\cos(1) + \sin(1).$$
- D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à sin, on a, $\forall x \geqslant 0$:
  $$|\sin(x) - x| \leqslant \left| \int_0^x \frac{-\sin(t)}{2} (x - t)^2 dt \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 dt \leqslant \frac{1}{2} \left[-\frac{(x - t)^3}{3} \right]_0^x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$
- On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$:
  $$|u_n - v_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \sin\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \frac{1}{6n^6} \sum_{k=0}^{n} k^3 \leqslant \frac{1}{6n^6} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
  Or $\frac{1}{6n^6} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{18n^6} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{18n^3} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Donc d'après le théorème des gendarmes, $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \sin(1) - \cos(1)}$.

---

1 Étude d'une suite *(Mines Ponts)*

Soient $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $\theta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.

   Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.
2. Déterminer θ_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un équivalent de u_n.

---

2 Polynômes *(Mines Ponts)*

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

---

1 Étude d'une suite

Soient $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.

1. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $\theta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.**

   Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1, +\infty[$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc il existe un unique $\theta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} &= \frac{\cos(\theta_{n+1})}{\sin(\theta_{n+1})} - \frac{\cos(\theta_n)}{\sin(\theta_n)} \\
&= \frac{\sqrt{1-\sin^2(\theta_{n+1})}}{\sin(\theta_{n+1})} - \frac{\sqrt{1-\sin^2(\theta_n)}}{\sin(\theta_n)} \\
&= \sqrt{u_{n+1}^2 - 1} - \sqrt{u_n^2 - 1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \ = \ u_n \ = \ \frac{1}{\sin(\theta_n)}.
\end{aligned}$$

2. **Déterminer θ_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un équivalent de u_n.**
   On simplifie la relation. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)} \\
\iff\ & \frac{\cos(\theta_{n+1})\sin(\theta_n) - \cos(\theta_n)\sin(\theta_{n+1})}{\sin(\theta_{n+1}!\sin(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)} \\
\iff\ & \sin(\theta_n - \theta_{n+1}) = \sin(\theta_{n+1})
\end{aligned}$$

   Or sin est injective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\forall n \geqslant 1$:

$$\theta_n - \theta_{n+1} = \theta_{n+1}, \qquad \text{soit } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

   Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

   On en déduit que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{n-1}}{\theta_1}$, avec $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}}\right)$.

---

2 Polynômes

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

Soit $P = a_0 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ qui laisse stable $\mathbb{U}$.
On pose $\widetilde{P} = \overline{a_0}X^n + \overline{a_1}X^{n-1} + \ldots + \overline{a_n} = X^n \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$.
Pour tout $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \frac{1}{u}$, donc $\widetilde{P}(u) = u^n \overline{P}(\overline{u}) = u^n \overline{P(u)}$.
Or P laisse stable $\mathbb{U}$, donc $P(u)\widetilde{P}(u) = u^n |P(u)|^2 = u^n$.
Ainsi, le polynôme $P\widetilde{P} - X^n$ s'annule une infinité de fois (sur $\mathbb{U}$), et est donc nul.
Donc $P\widetilde{P} = X^n$, avec $\deg(P) = n$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ tel que $P = \lambda X^n$, et $\widetilde{P} = \frac{1}{\lambda}$.

Or $|P(1)| = |\lambda| = 1$ car $1 \in \mathbb{U}$. Donc $\lambda \in \mathbb{U}$.
Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = \lambda X^n$, alors P laisse stable $\mathbb{U}$.
Finalement $\boxed{(P \in \mathbb{C}[X] \text{ laisse stable } \mathbb{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists \lambda \in \mathbb{U}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad P = \lambda X^n)}$.

---

1 Coefficients binomiaux généralisés *(Centrale)*

Pour α réel et $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit : $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. On pose $\displaystyle\binom{\alpha}{0} = 1$.

On définit aussi la suite de polynômes $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{1/2}{k} (1-X^2)^k$.

1. Montrer que pour m et n entiers naturels tels que $m \geqslant n$:

$$\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}.$$

2. En déduire l'égalité pour α réel : $\displaystyle\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\displaystyle\binom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.
4. Étudier le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} x^n$.
5. Montrer, pour x dans $]-1,1[$, l'égalité :

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} (-1)^n x^n.$$

   Montrer qu'elle est toujours valable pour $x=-1$ et $x=1$.
6. Montrer que la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

---

1 Coefficients binomiaux généralisés

1. **Montrer que pour m et n entiers naturels tels que $m \geqslant n$:**

$$\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}.$$

La preuve la plus simple utilise le dénombrement : soient A et B deux parties disjointes ayant m éléments, et soit $n \in [\![0, 2n]\!]$.
On cherche à compter le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$. Comme $\mathrm{Card}(A \sqcup B) = 2m$, on a $\binom{2m}{n}$ possibilités.
Mais on peut aussi compter en faisant des cas sur le nombre d'éléments dans A et dans B. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{m}{p}$ possibilités pour choisir p éléments dans A, puis $\binom{m}{n-p}$ possibilités pour choisir les éléments restants dans B. Les cas sont disjoints, donc en tout $\boxed{\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}}$ possibilités.

2. **En déduire l'égalité pour α réel : $\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.**

Soit $P : \alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$. Cette application est polynomiale et s'annule en tous les entiers $m \geqslant n$. Donc elle est nulle.

3. **Montrer qu'il existe une constante C telle que $\binom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.**

On pose $u_n = (-1)^n n^{3/2}\binom{1/2}{n}$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \frac{2n-1}{2(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{3}{2(n+1)}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, donc $(\ln(u_n))$ converge. Ainsi (u_n) converge vers une constante non nulle, donc $\boxed{\binom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}}$.

4. **Étudier le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} x^n$.**

D'après la question précédente, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
En utilisant la règle de d'Alembert, le rayon vaut $\boxed{R = 1}$.

5. **Montrer, pour x dans $]-1, 1[$, l'égalité : $\sqrt{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n}(-1)^n x^n$.**
Montrer qu'elle est toujours valable pour $x = -1$ et $x = 1$.
On écrit le développement en série entière de $(1+x)^{1/2}$, et on remarque que le coefficient de x^n vaut :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

De plus, en posant $f_n : x \mapsto \binom{1/2}{n}(-1)^n x^n$, on a $||f_n||_\infty \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{3/2}}$.
Donc la série converge normalement, et est continue en 1 et -1.

6. **Montrer que la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.**

Pour tout $x \in [-1,1]$, $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} (1-x^2)$.

Donc comme la série converge :

$$|x| - L_n(x) = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k (1-x^2) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \binom{1/2}{n} \right| (1-x^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1 Commutant matrice *(CCINP)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

---

2 Fonction génératrice *(CCINP)*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E(t^X)$.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1, une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$, puis en déduire la loi de S_n.

---

1 Commutant matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. **Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.**
   On calcule le polynôme caractéristique. Pour tout $x \in \mathbb{C}$:
$$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1) - 4 = x^2 - x - 6.$$
   Ses racines sont -2 et 3, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 3\}}$. De plus :
$$(x,y) \in \ker(A + 2I_2) \iff \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 4x + y = 0.$$
   Donc $\boxed{\ker(A+2I_2) = \mathrm{Vect}((1,-4))}$. De même, $\boxed{\ker(A - 3I_2) = \mathrm{Vect}((1,1))}$.

2. **Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.**
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3a & -2b \\ 3c & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -2c & -2d \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{array} \right.,$$
   soit $b = c = 0$. Donc $\boxed{\text{les matrices qui commutent avec } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ sont les matrices diagonales}}$.
   On sait qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1}$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors M commute avec A si et seulement si :
$$MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \iff (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP) \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1},$$
   avec $(a,d) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $C(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1},\ (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   En particulier, $C(A)$ est un sev de dimension 2.
   Or $I_3 \in C(A)$, $A \in C(A)$, donc $\mathrm{Vect}(I_3, A) \subset C(A)$, avec $\dim(C(A)) = \dim(\mathrm{Vect}(I_3, A)) = 2$.
   Ainsi $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(I_3, A)}$.

---

2 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. **Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.**
   On sait que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$.
   Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ est superieur à 1.
   Donc $\boxed{]-1,1[\text{ est inclus dans } D_{G_X}, \text{ le domaine de définition de } G_X}$.

2. **Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.**
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

   (a) Avec un produit de Cauchy : soit R_i le rayon de convergence de la série entière G_{X_i}. Alors $R_i \geqslant 1$.
   On considère le produit de Cauchy : $\sum c_n t^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.
   On sait que son rayon de convergence vérifie $R \geqslant \min(R_1, R_2)$, donc $R \geqslant 1$. De plus, pour tout $t \in]-1,1[$:

   $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n.$$

   Or X_1 et X_2 sont indépendantes, donc :

   $$P(S = n) = P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} P((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k).$$

   On a donc bien :

   $$G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = n)t^n = \boxed{G_S(t)}.$$

   (b) Avec la définition : soit $t \in]-1,1[$. D'après 1, t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance finie.
   De plus, X_1 et X_2 sont indépendantes, donc t^{X_1} et t^{X_2} aussi. Donc $t^{X_1}t^{X_2} = t^{X_1+X_2} = t^S$ admet une espérance, et :

   $$G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^S) = \boxed{G_S(t)}.$$

3. **Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1, une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.**
   On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in]-1,1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$, puis en déduire la loi de S_n.

   Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k le numéro tiré au k-ème tirage. Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et les $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. Donc d'après la question précédente : $G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.
   Or d'après la formule de transfert, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

   $$G_{X_k}(t) = E(t^{X_k}) = 1P(X_k = 0) + tP(X_k = 1) + t^2P(X_k = 2) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} = \frac{(1+t)^2}{4}.$$

   On a donc :

   $$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{t(2+t)}{4} = \boxed{\frac{(1+t)^{2n}}{4^n}}.$$

   On sait de plus que $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k)t^k$.
   Or la formule obtenue s'écrit : $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k}t^k$.
   Par unicité du développement en série entière, on a donc $S_n(\Omega) = [\![0,2n]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$:

   $$P(S_n = k) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k} = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{2n-k}}.$$

   Donc $\boxed{S_n \sim \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)}$.

1 Fonction définie par une intégrale *(Mines Telecom)*

On définit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^x dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue et décroissante. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

---

2 Endomorphismes symétriques *(Mines Telecom)*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1, sauf sur la diagonale qui n'est constituée que de 0. Montrer sans calcul que cette matrice est diagonalisable.
2. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé f est symétrique.
3. Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si A est une matrice symétrique réelle, alors ses sous-espaces propres distincts sont orthogonaux.

---

1 Fonction définie par une intégrale

On définit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^x dt$.

1. **Donner le domaine de définition de f.**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \tan(t)^x$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. De plus, $\tan(t)^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, intégrable si et seulement si $x > -1$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[}$.
2. **Montrer que f est continue et décroissante. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.**
   Soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$.
   - La fonction $t \mapsto \tan(t)^x$ est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,
   - la fonction $x \mapsto \tan(t)^x$ est continue sur $[a, b]$
   - $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(t)^x \leqslant \tan(t)^a$, intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   Donc f est continue sur $[a, b]$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1, +\infty[}$.

   Soit $x \leqslant y$ dans $]-1, +\infty[$. Alors $f(y) - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^x \left(\tan(t)^{y-x} - 1\right) dt$.

   Or $y - x \geqslant 0$, donc $\tan(t)^{y-x} - 1 \leqslant 0$. Donc $f(y) \leqslant f(x)$, et $\boxed{f \text{ est décroissante}}$.

   Par convergence dominée sur $[0, +\infty[$, on montre enfin que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
3. **Calculer $f(x) + f(x + 2)$ et en deduire un équivalent de f en $+\infty$.**
   On a, pour tout $x > -1$:
   $$f(x) + f(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(t)\right) \tan(t)^x dt = \left[\frac{1}{x+1} \tan(t)^{x+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{x+1}.$$
   Or f est décroissante, donc pour tout $x > 1$:
   $$f(x) + f(x+2) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x-2) + f(x) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{x+1} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1}.$$
   Puis par théorème d'encadrement pour les équivalents : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$.

2 Endomorphismes symétriques

1. **Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1, sauf sur la diagonale qui n'est constituée que de 0. Montrer sans calcul que cette matrice est diagonalisable.**
   M est symétrique réelle donc diagnalisable d'après le théorème spectral.
2. **Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé f est symétrique.**
   Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors f est symétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$, ce qui est vrai si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:
   $$\langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle \iff e_i^T A^T e_j = e_j^T A e_j \iff a_{i,j} = a_{j,i}.$$
   On obtient bien $\boxed{f \text{ est symétrique ssi } A \text{ est symétrique}}$.
3. **Montrer, sans utiliser le théorème spectral, que si A est une matrice symétrique réelle, alors ses sous-espaces propres distincts sont orthogonaux.**
   Soient x, y deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ. Alors :
   $$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle, \quad \text{donc} \quad \lambda \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle, \quad \text{donc} \quad (\lambda - \mu) \langle x, y\rangle = 0.$$
   Or $\lambda \neq \mu$, donc $\langle x, y\rangle = 0$, et $\boxed{\text{les sous-espaces propres distincts sont orthogonaux}}$.

1 Fonction définie par une intégrale *(Mines Ponts)*

Soit $F : x \in]1,+\infty[\to \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Déterminer la limite de F en 1^+.
2. Montrer que F est injective.

---

2 Polynômes *(Mines Ponts)*

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

---

1 Fonction définie par une intégrale

Soit $F : x \in]1, +\infty[\to \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$.

1. **Déterminer la limite de F en 1^+.**
Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [\ln(x), 2\ln(x)]$, on a, par croissance de exp :
$$\frac{e^{\ln(x)}}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2\ln(x)}}{t}, \quad \text{donc} \quad \frac{x}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{x^2}{t}.$$
Donc comme $\ln(x) \leqslant 2\ln(x)$:
$$\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{x}{t} dt \leqslant \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt \leqslant \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{x^2}{t} dt,$$
soit en calculant les deux intégrales :
$$x\left(\ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x))\right) \leqslant \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt \leqslant x^2 \left(\ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x))\right),$$
puis par propriétés du ln : $x\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant x^2 \ln(2)$.
Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to 1^+} F(x) = \ln(2)}$.

2. **Montrer que F est injective.**
Soit $g : t \mapsto \frac{e^t}{t} dt$. La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$, donc admet une primitive G sur cet intervalle.
Pour tout $x > 1$, on a bien $[\ln(x), 2\ln(x)] \subset]0, +\infty[$, donc $F(x) = G(2\ln(x)) - G(\ln(x))$.
Donc F est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, et $\forall x > 1$:
$$F'(x) = \frac{2}{x} G'(2\ln(x)) - \frac{1}{x} G'(\ln(x)) = \frac{2e^{2\ln(x)}}{2x\ln(x)} - \frac{e^{\ln(x)}}{x\ln(x)} = \frac{x^2 - x}{x\ln(x)} > 0.$$
Donc F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc $\boxed{F \text{ est injective}}$.

---

2 Polynômes

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

Soit $P = a_0 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ qui laisse stable $\mathbb{U}$.
On pose $\widetilde{P} = \overline{a_0} X^n + \overline{a_1} X^{n-1} + \ldots + \overline{a_n} = X^n \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$.
Pour tout $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \frac{1}{u}$, donc $\widetilde{P}(u) = u^n \overline{P}(\overline{u}) = u^n \overline{P(u)}$.
Or P laisse stable $\mathbb{U}$, donc $P(u)\widetilde{P}(u) = u^n |P(u)|^2 = u^n$.
Ainsi, le polynôme $P\widetilde{P} - X^n$ s'annule une infinité de fois (sur $\mathbb{U}$), et est donc nul.
Donc $P\widetilde{P} = X^n$, avec $\deg(P) = n$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ tel que $P = \lambda X^n$, et $\widetilde{P} = \frac{1}{\lambda}$.
Or $|P(1)| = |\lambda| = 1$ car $1 \in \mathbb{U}$. Donc $\lambda \in \mathbb{U}$.
Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = \lambda X^n$, alors P laisse stable $\mathbb{U}$.
Finalement $\boxed{(P \in \mathbb{C}[X] \text{ laisse stable } \mathbb{U}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{U}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad P = \lambda X^n)}$.

---

1 Coefficients binomiaux généralisés *(Centrale)*

Pour α réel et $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit : $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. On pose $\dbinom{\alpha}{0} = 1$.

On définit aussi la suite de polynômes $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{1/2}{k}(1-X^2)^k$.

1. Montrer que pour m et n entiers naturels tels que $m \geqslant n$:
$$\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}.$$
2. En déduire l'égalité pour α réel : $\dbinom{2m}{n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\dbinom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.
4. Étudier le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} x^n$.
5. Montrer, pour x dans $]-1,1[$, l'égalité :
$$\sqrt{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n}(-1)^n x^n.$$
Montrer qu'elle est toujours valable pour $x=-1$ et $x=1$.
6. Montrer que la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

---

1 Coefficients binomiaux généralisés

1. **Montrer que pour m et n entiers naturels tels que $m \geqslant n$:**

$$\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}.$$

La preuve la plus simple utilise le dénombrement : soient A et B deux parties disjointes ayant m éléments, et soit $n \in [\![0, 2n]\!]$.
On cherche à compter le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$. Comme $\mathrm{Card}(A \sqcup B) = 2m$, on a $\binom{2m}{n}$ possibilités.
Mais on peut aussi compter en faisant des cas sur le nombre d'éléments dans A et dans B. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{m}{p}$ possibilités pour choisir p éléments dans A, puis $\binom{m}{n-p}$ possibilités pour choisir les éléments restants dans B. Les cas sont disjoints, donc en tout $\boxed{\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p}}$ possibilités.

2. **En déduire l'égalité pour α réel : $\binom{2m}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.**

Soit $P : \alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$. Cette application est polynomiale et s'annule en tous les entiers $m \geqslant n$. Donc elle est nulle.

3. **Montrer qu'il existe une constante C telle que $\binom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.**

On pose $u_n = (-1)^n n^{3/2} \binom{1/2}{n}$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \frac{2n-1}{2(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2(n+1)}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, donc $(\ln(u_n))$ converge. Ainsi (u_n) converge vers une constante non nulle, donc $\boxed{\binom{1/2}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}}$.

4. **Étudier le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} x^n$.**

D'après la question précédente, on a : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
En utilisant la règle de d'Alembert, le rayon vaut $\boxed{R = 1}$.

5. **Montrer, pour x dans $]-1, 1[$, l'égalité : $\sqrt{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} (-1)^n x^n$.**
Montrer qu'elle est toujours valable pour $x = -1$ et $x = 1$.
On écrit le développement en série entière de $(1+x)^{1/2}$, et on remarque que le coefficient de x^n vaut :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

De plus, en posant $f_n : x \mapsto \binom{1/2}{n}(-1)^n x^n$, on a $||f_n||_\infty \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{3/2}}$.
Donc la série converge normalement, et est continue en 1 et -1.

6. **Montrer que la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.**

   Pour tout $x \in [-1,1]$, $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} (1-x^2)$.

   Donc comme la série converge :

$$|x| - L_n(x) = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k (1-x^2) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \binom{1/2}{n} \right| (1-x^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\boxed{1}$ Endomorphismes et polynômes *(Centrale)*

On se donne un entier naturel non nul N.
Soit f définie par, pour tout P dans $\mathbb{R}_N[X]$:

$$f(P) = XP - \frac{1}{N}(X^2 - 1)P'.$$

Soit, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $B_k = (X-1)^{N-k}(X+1)^k$.

1. Montrer rapidement que f est un endomorphisme. Exprimer la matrice M de f dans la base canonique.

On admet que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$, $f(B_k) = \dfrac{2k - N}{N} B_k$.
On pose $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_N)$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ à $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que la suite (M^{2n}) converge vers une matrice L qu'on exprimera en fonction de P.
5. (a) Donner la première et la dernière colonne de P.
   (b) Donner la première et la dernière ligne de P^{-1}.
   (c) Calculer L.
6. On considère une urne contenant r boules rouges et b boules blanches. Quand on tire une blanche, on rajoute une rouge et on ne remet pas la blanche. De même, quand on tire une rouge, on ne la remet pas et on rajoute une blanche.
   (a) Déterminer la loi du nombre de boules rouges à la fin du premier tirage, puis à la fin du n-ième tirage (on note R_n le nombre de boules rouges). Une relation de récurrence suffit.
   (b) On répète l'expérience précédente $2n$ fois. Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(R_{2n} = k)$?

---

1 Endomorphismes et polynômes

1. **Montrer rapidement que f est un endomorphisme. Exprimer la matrice M de f dans la base canonique.**

   Par linéarité de la dérivation, f est linéaire. De plus, pour tout $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $\deg(f(P)) \leqslant N+1$, et le coefficient de X^{N+1} est $a_N - \frac{1}{N} N a_N = 0$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_N[X]$, et $\boxed{f \text{ est un endomorphisme}}$.

   On obtient comme matrice : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & 1-\frac{1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$.

2. **Montrer que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}_N[X]$.**

   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k B_k = 0$.

   En évaluant en -1, on a $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k (X-1)^{N-k}(X+1)^k = 0$, donc

   $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k (X-1)^{N-k}(X+1)^{k-1} = 0$.

   Puis en évaluent en -1, λ_1. Par récurrence : $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $\lambda_k = 0$.

   Donc $\mathcal{B}$ est libre, elle contient $N+1$ éléments dans $\mathbb{R}_N[X]$ de dimension $N+1$, donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base}}$.

3. **Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.**

   Avec la propriété donnée par l'énoncé, D est diagonale de diagonale $\left(-1, -1+\frac{2}{N}, -1+\frac{4}{N}, \dots, 1-\frac{2}{N}, 1\right)$.

4. **Montrer que la suite (M^{2n}) converge vers une matrice L qu'on exprimera en fonction de P.**

   La matrice D^{2n} converge vers $E_{1,1} + E_{N+1,N+1}$, donc M^{2n} converge vers $L = P(E_{1,1} + E_{N+1,N+1})P^{-1}$.

5. (a) **Donner la première et la dernière colonne de P.**

   On a $B_0 = (X-1)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{N-K} X^k$, donc la première colonne est $((-1)^{N-k}\binom{N}{k})_{k=0\dots N}$.

   De même, $B_N = (X+1)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} X^k$, donc la dernière colonne est $(\binom{N}{k})_{k=0\dots N}$.

   (b) **Donner la première et la dernière ligne de P^{-1}.**

   On veut les coefficients selon B_0 de $1, X, \dots, X^N$.

   Soit $k \in [\![0, N]\!]$. On pose $X^k = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i B_i$.

   En évaluant en -1, on a : $\lambda_0(-2)^N = (-1)^k$. Donc la première ligne est $\boxed{\left(\frac{(-1)^k}{(-2)^N}\right)_{k=0\dots N}}$.

   De même, la dernière ligne est $\boxed{\left(\frac{1}{2^N}\right)_{k=0\dots N}}$.

   (c) **Calculer L.**

   Soit $C_0, \dots, C_N$ les colonnes de P et $L_0, \dots, L_N$ les lignes de P^{-1}. Alors :

   $$L = P(E_{1,1} + E_{N+1,N+1})P^{-1} = PE_{1,1}P^{-1} + PE_{N+1,N+1}P^{-1} = C_0L_0 + C_NL_N.$$

   Or $C_0L_0 = \left(\binom{N}{i}\frac{(-1)^{2N-i+j}}{2^N}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant N}$ et $C_NL_N = \left(\binom{N}{i}\frac{1}{2^N}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant N}$.

   Donc $\boxed{L = \left(\binom{N}{i}\frac{(-1)^{j-i}+1}{2^N}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant N}}$

6. (a) **Déterminer la loi du nombre de boules rouges à la fin du premier tirage, puis à la fin du n-ième tirage (on note R_n le nombre de boules rouges). Une relation de récurrence suffit.**
On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}=k) &= P_{R_n=k-1}(R_{n+1}=k)P(R_n=k-1)+P_{R_n=k+1}(R_{n+1}=k)P(R_n=k+1) \\ &= \frac{N-k+1}{N}P(R_n=k-1)+\frac{k+1}{N}P(R_n=k-1). \end{aligned}$$

Donc en posant $X_n=(P(R_b=k))_{k=0\dots N}$, on a : $\boxed{X_{n+1}=MX_n}$.

(b) **On répète l'expérience précédente $2n$ fois. Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(R_{2n}=k)$?**
On a donc $X_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} LX_0$.

Donc $\boxed{P(R_{2n}=k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-r}+1}{2^N}}$.
