Oraux blancs

Exercice 1. [Centrale MP 2021]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \ln(2) u$.

1. Montrer que u est nilpotent. *Ind. On pourra calculer* $u^k \circ v - v \circ u^k$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

Exercice 2. [Centrale MP 2021]

1. Montrer qu'il existe une unique suite (H_n) de polynômes tels que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(xt - t^2/2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n$$

2. Montrer que $H_n' = H_{n-1}$ et $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$.
3. Montrer que les H_n forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. [CCP 2022]
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice 4. [CCINP MP 2021]
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question précédente les éléments propres de B.

Exercice 5. [Mines, mais niveau X-ENS]
Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e)-t}$.

1. Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Soit $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Déterminer la probabilité que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de sous-espaces stables.