Exercice 1. [Mines MP 2015]
Soient $a < 0 < b$ et F l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ dont toutes les dérivées sont positives sur $]a,b[$ (*(On dit que f est absolument monotone)*.

1. Montrer que F est stable par somme et par produit.
2. Soit $R_n(x)$ le reste de Taylor d'ordre n entre 0 et x. Montrer que R_n est une fonction croissante sur $]0,b[$.
3. Montrer que f est développable en série entière autour de 0 sur $]a,b[$.

Exercice 2. [Centrale MP 2021]
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$.

1. Montrer que ϕ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Exprimer $\phi_X(t)$.
3. On suppose que X possède un moment d'ordre 2. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$. Exprimer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de ϕ_X.

Exercice 3. [Mines MP 2015]
Résoudre l'équation différentielle d'inconnue x fonction à valeurs réelles :

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ x & x'' & x' \\ x' & x & x'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 4. [X 2015]
Soit (B_n) un suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de loi définie par $\mathrm{P}(B_1 = 1) = p$ et $\mathrm{P}(B_1 = -1) = q$ où $p, q \in]0,1[$ et $p + q = 1$.
On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$.
On introduit la variable aléatoire $T : \omega \mapsto \inf\{k \in \mathbb{N} \mid S_k(\omega) = 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et on pose $f_n = \mathrm{P}(T = n)$.

1. Montrer que $f(1) = p$ et que : $\forall\, n \geqslant 2,\ f(n) = q \sum_{k=2}^{n-1} f(k-1) f(n-k)$.
2. Montrer que $g : s \mapsto \mathrm{E}(s^T \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}})$ est bien définie au voisinage de 0 et que, au voisinage de 0, $g(s) = ps + qsg(s)^2$.
3. En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
