ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n$

   (a) Soit $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $\mathrm{S} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme suit

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant u_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k + u_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   i. Écrire une fonction `suite(x,n)` qui renvoie $\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$.

   ii. Tester la fonction pour différentes valeurs de x et $n \in \{100, 1000, 10000\}$.

   iii. Conjecturer le comportement de la suite.

   (c) Démontrer la conjecture.

2. Soit $(u_n)_n$ vérifiant

$$(\mathrm{H}) : \begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ (u_n)_n \text{ décroissante positive} \end{cases}$$

Soit $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $x \in [\,0\,;\lambda\,]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme précédemment. On pose

$$(\mathrm{P}) : \forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$$

   (a) On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

   i. Montrer que $(u_n)_n$ vérifie (H).

   ii. Adapter la fonction `suite` et la tester pour $x \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$ et plusieurs valeurs de n.

   iii. La suite $(u_n)_n$ vérifie-t-elle (P) ? Justifier.

   (b) Déterminer une condition nécessaire suffisante sur $(u_n)_n$ pour qu'elle vérifie (P).

Exercice 2 (Centrale 2019)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+x} - 1$.

1. (a) Tracer le graphe de f_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (b) Déterminer des valeurs approchées de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (c) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie la matrice A_n.
   (d) Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer la conjecture précédente.
3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]-1\,;+\infty[$ puis montrer que celle-ci est supérieure à n à partir d'un certain rang.
5. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$.
6. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de λ_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 3 (Centrale 2015)

1. Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}/n$ où $\mathrm{Y} \sim \mathscr{B}(n,p)$.
2. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

   Soit $t > 0$ et $x \in [-1\,;1]$.
3. Montrer $$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$$
4. On considère X variable aléatoire telle que $|\mathrm{X}| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. Pour $t > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{ch}\, t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
5. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ on ait $|\mathrm{X}_i| \leqslant a_i$. On poser $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Montrer
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
6. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
7. En déduire $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$$
8. Commenter le résultat observé à la deuxième question.