ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°6

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $\mathrm{M} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_n$ est bornée.

   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   On admettra dans la suite de l'exercice que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   (c) i. Justifier que pour tout n entier, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   ii. Prouver
   $$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$

1. On suppose $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q dans $]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z} \leqslant \mathrm{X}$. En déduire que Z est d'espérance finie et déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.
2. Déterminer la loi de Z.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

1. Établir
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$$
2. Déterminer un équivalent de $u_n - v_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5 (Mines 2023)

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $a_1, \ldots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 < \ldots < a_n$ et la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$. On suppose que la fonction f s'annule n fois. Montrer $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
2. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels vérifiant $b_1 < \ldots < b_n$ et $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que la matrice A est inversible.
3. Établir $$\det \mathrm{A} > 0$$

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=n} \frac{1}{i^2 j^2}$$

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ et calculer sa somme S.
3. Étudier la définition et continuité de S en R et $-\mathrm{R}$.

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une relation entre A, Com A et det A.
2. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec
$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Calculer det A.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et tels que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$.
   (a) Montrer que la matrice A est inversible.
   (b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Un $\mathbb{R}$-ev normé est dit *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

1. L'espace $\mathbb{R}$ est-il séparable ?
2. Montrer qu'un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie est séparable.
3. Soit E préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que l'espace E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_n$ telle que $\operatorname{Vect}(e_n)_n$ est dense dans E.