Planche 1 - CCINP

Exercice 1

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} & = & 4^n \\ a_{2n+1} & = & 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un scalaire c non nul tel que cf soit un projecteur ;
   (b) $f \circ f \neq 0$;
   (c) $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

Planche 2 - Centrale

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer l'existence de $d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid M^k = 0_n\}$ et que $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \leqslant n$, puis étudier le cas d'égalité.

Planche 3 - Centrale

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien en $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. Etablir l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
   (i) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \langle s(x), s(y) \rangle = c\langle x, y \rangle$.
   (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle s(x), s(y) \rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : pour tout sous-espace V de E, $y(V^\perp) \subset u(V)^\perp$.

Planche 4 - Mines

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $A_1, \cdots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables, commutant entre elles.

1. (a) Montrer que A_1 et A_2 sont simultanément diagonalisables.
   (b) Conclure pour $A_1, \cdots, A_p$ (*On fera une récurrence*).
2. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dansl $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = I_n\}$. Montrer que G est fini. Que dire de son cardinal ?
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ distincts. Existe-t-il un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?