Planche 1 - CCINP

Exercice 1

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c) pour que M soit dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. *On donne l'identité :* $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ac + ab + cb)$.
2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ac + ab + cb$. D'après la question précédente, pour quelles valeurs de (α, β), M est-elle dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Planche 3 - Centrale

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. On considère x un élément de $[0; 1]$ et une suite (x_n) une suite d'éléments de $[0; 1]$ convergeant vers x.

1. On suppose que la convergence de la suite de fonction (f_n) est uniforme. Montrer que $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.
2. Montrer que ce n'est plus nécessairement le cas sans la convergence uniforme.

On suppose maintenant la propriété suivante vérifiée : Pour toute suite (x_n) de $[0; 1]$ convergente, $(f_n(x_n))$ l'est aussi. Soit (x_n) une suite de $[0; 1]$ qui converge vers x.

3. (a) Montrer que $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.
   (b) Soit ϕ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Que dire de $(f_{\phi(n)}(x_n))$?
   (c) Montrer que f est continue.
   (d) Montrer que la convergence est uniforme.

Planche 4 - Mines

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle ., . \rangle$ associé à la norme $||.||$. On note N une norme quelconque sur E.

1. Soit $x \in E$. Après avoir justifié l'existence de ces nombres, montrer que :
$$\sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle x, y \rangle}{N(y)} = \sup_{y \in E,\, N(y)=1} \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}_+.$$
   On note dorénavant cette quantité $N^*(x)$.
2. Montrer que N^* définit une norme sur E.
3. Donner N^* dans les cas où $N = ||.||$, $N = ||.||_\infty$ et $N = ||.||_1$.