Exercice 1. [Centrale MP 2 2015]
Pour $n \geqslant 1$, on note $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et S_n le groupe des permutations de E_n. En Python une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$. Pour $i \in E_n$, la *période* de i pour $\sigma \in S_n$ est le plus petit entier naturel non nul p tel que $\sigma^p(i) = i$. On le note $Per(\sigma, i)$.

1. Justifier l'existence de $Per(\sigma, i)$ et montrer qu'elle est plus petite que n. Préciser l'ordre de σ en fonction des $Per(\sigma, i)$.
2. Écrire une fonction qui retourne la période d'un élément i pour une permutation σ.
3. Écrire une fonction qui retourne la liste des périodes, pour une permutation σ, des éléments de E_n.
   Application : $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9]$.

Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation R_σ sur E_n par : $xR_\sigma y \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x)$.

4. Montrer que R_σ est une relation d'équivalence.

On appelle *orbite* d'un élément x de E_n sa classe d'équivalence. On la note $\Omega_\sigma(x)$.

5. Montrer que $\Omega_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$ où $p = Per(\sigma, x)$.
6. Écrire une fonction qui retourne la liste des orbites d'une permutation σ.

Exercice 2. [Mines PSI/MP]
Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 + f^2 - \mathrm{Id}_E = 0$.
Montrer que n est multiple de 3.

Exercice 3. [Centrale MP 2021]

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence de $d = \min\left\{p \in \mathbb{N} \,\middle|\, M^p = 0\right\}$ et l'inégalité $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et donner son inverse.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$. Montrer que $|\mathrm{Tr} M| \leqslant n$ et étudier les cas d'égalité.
4. Reprendre les questions 2. et 3. pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. [Mines MP]
Soient A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme tels que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.
