Préparation à l'oral - Feuille n°5

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;1\,]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

1. (a) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|_1 \leqslant k\|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathrm{E}$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Corrigé : Exercice 37 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{A})$.

Corrigé : Exercice 73 CCPINP 2023

Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni de

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] \, \mathrm{d}t$$

On pose $\quad \mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad$ et $\quad \mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} \mid f'' \text{ existe et } f'' = f\}$

1. Justifier que $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que W est un sev de E de dimension finie et en donner une base.
3. Établir $$\mathrm{V} \perp \mathrm{W}$$
4. Pour $f \in \mathrm{E}$, déterminer une expression simple de $p_{\mathrm{W}}(f)$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et de la fonction sh.
5. Montrer $$\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}$$

Corrigé : 1. Pour $(f,g)\in \mathrm{E}^2$, l'intégrale définissant $\langle f,g\rangle$ est bien convergente en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. L'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de la dérivation, du produit à droite et de l'intégrale. Soit $f\in\mathrm{E}$. On a $\langle f,f\rangle=\displaystyle\int_0^1 [f(t)^2+f'(t)^2]\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ par positivité de l'intégrande et de l'intégrale. Si $\langle f,f\rangle=0$, comme $f^2+f'^2$ est continue positive sur $\int 01$, il vient par séparation $f^2+f'2=0$ d'où $f=0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } (f,g)\mapsto\langle f,g\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. Les solutions de l'équation $y''=y$ sur $[\,0\,;1\,]$ sont dans $\operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ avec

$$\forall t\in[\,0\,;1\,]\qquad \varphi(t)=\mathrm{e}^t\quad\text{et}\quad \psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$$

On vérifie sans peine que cet espace $\operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ est inclus dans W. Par double inclusion, l'égalité $\mathrm{W}=\operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ suit et comme (φ,ψ) est libre, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\varphi,\psi) \text{ est une base de W.}}$$

3. Soit $f\in\mathrm{E}$. On a
$$f\in\mathrm{W}^\perp\iff\begin{cases}\langle f,\varphi\rangle=0\\ \langle f,\psi\rangle=0\end{cases}$$

En intégrant par parties et en utilisant $\varphi''=\varphi$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi\rangle&=\int_0^1[f(t)\varphi(t)+f'(t)\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t+[f(t)\varphi'(t)]_0^1-\int_0^1 f(t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t=[f(t)\varphi'(t)]_0^1\end{aligned}$$

De même, on trouve
$$\langle f,\psi\rangle=[f(t)\psi'(t)]_0^1$$

On en déduit
$$\forall f\in\mathrm{V}\qquad\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\psi\rangle=0$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{V}\perp\mathrm{W}}$$

Remarque : On pourrait, sans trop d'effort additionnel, établir directement $\mathrm{E}=\mathrm{W}\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{V}$.

4. On trouve $\langle\varphi,\psi\rangle=0$, $\langle\varphi,\varphi\rangle=\mathrm{e}^2-1$ et $\langle\psi,\psi\rangle=1-\mathrm{e}^{-2}$. La famille (u_1,u_2) avec $u_1=\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$ et $u_2=\dfrac{\psi}{\|\psi\|}$ est une base orthonormée de W. Pour $f\in\mathrm{E}$, on a

$$p_{\mathrm{W}}(f)=\langle f,u_1\rangle\,u_1+\langle f,u_2\rangle\,u_2=\frac{\langle f,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle}\varphi+\frac{\langle f,\psi\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle}\psi$$

Notant $g=p_{\mathrm{W}}(f)$, il vient pour $t\in[\,0\,;1\,]$

$$g(t)=\frac{f(1)\mathrm{e}-f(0)}{\mathrm{e}^2-1}\mathrm{e}^t+\frac{\mathrm{e}\,f(0)-f(1)}{1-\mathrm{e}^{-2}}\mathrm{e}^{-t}$$

En factorisant e^1 dans la première fraction et e^{-1} dans la deuxième, on obtient

$$\boxed{\forall t\in[\,0\,;1\,]\qquad p_{\mathrm{W}}(f)(t)=\frac{f(1)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}t-\frac{f(0)}{\operatorname{sh}(1)}\operatorname{sh}(t-1)}$$

Variante : On peut procéder par caractérisation géométrique. On observe que $(\operatorname{ch},\operatorname{sh})$ est une base de W et on pose $g=f-p_{\mathrm{W}}(f)$.

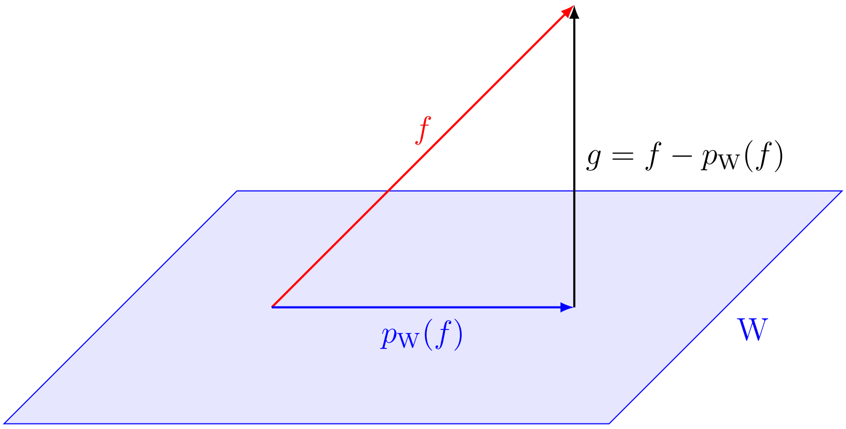

FIGURE 1 – Décomposition d'une projection orthogonale sur W

On a
$$g \in \mathrm{W}^{\perp} \iff \begin{cases} \langle g, \mathrm{ch}\,\rangle = 0 \\ \\ \langle g, \mathrm{sh}\,\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(1)\,\mathrm{sh}\,(1) = 0 \\ \\ g(1)\,\mathrm{ch}\,(1) - g(0)\,\mathrm{ch}\,(0) = 0 \end{cases}$$
Notant $g = f - (a\,\mathrm{ch} + \mathrm{sh}\,)$ avec a, b réels, il vient
$$g \in \mathrm{W}^{\perp} \iff \begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = a\,\mathrm{ch}\,(1) + b\,\mathrm{sh}\,(1) \end{cases}$$
et on retrouve le résultat précédent.

5. On reprend les équivalences établies à la question 3. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a
$$\begin{aligned} f \in \mathrm{W}^{\perp} &\iff \begin{cases} f(1)\mathrm{e} - f(0) &= 0 \\ f(1)\mathrm{e}^{-1} - f(0) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e} & -1 \\ \mathrm{e}^{-1} & -1 \end{pmatrix}}_{\det = -2\,\mathrm{sh}\,1 \neq 0} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff f(0) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{W}^{\perp} = \mathrm{V}$ et on conclut
$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}}$$

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(p_n)_n$ d'application polynomiales telle que la suite $(p_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit n entier non nul. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $p_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ (on confond polynôme et fonction polynomiale) tel que
$$\|p_n - f\|_{\infty, [-n\,;n]} \leqslant \frac{1}{n}$$
Comme toute segment est inclus dans $[-n\,;n]$ pour n assez grand, il en résulte que
$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_n \text{ converge uniformément sur } f \text{ sur tout segment de } \mathbb{R}.}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Pour n entier $\geqslant 2$, on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis montrer sa convergence.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ puis un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque $n \to +\infty$;

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ avec

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

ce qui prouve que la fonction f_n décroît strictement sur $[\,0\,;1\,]$ et comme on a $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$, on en déduit que la fonction f_n réalise une bijection de $[\,0\,;1\,]$ sur $[\,2-n\,;1\,]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2, \text{ il existe un unique } x_n \in [\,0\,;1\,] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$ et $n \geqslant 2$. On a

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 \leqslant x^n - nx + 1 = f_n(x)$$

d'où
$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_n(x_{n+1})$$

et par décroissance stricte de f_n, on obtient $x_n \geqslant x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par zéro et par limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante et convergente.}}$$

3. On a
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant nx_n = 1 + x_n^n \leqslant 2$$

d'où
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Ainsi
$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Puis, on observe
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant x_n = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$nx_n = 1 + x_n^n = 1 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Remarque : On n'utilise pas le résultat de la question précédente.

4. Soit $n \geqslant 2$. On a $x_n^n = nx_n - 1$ d'où

$$1 = x_n^{-n}(nx_n - 1)$$

puis
$$-n \ln x_n + \ln(nx_n - 1) = 0$$

Par ailleurs, on a

$$n \ln n + n \ln x_n = n \ln(nx_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(nx_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx_n^n = \exp\left(n\left(\ln x_n + \frac{\ln n}{n}\right)\right) = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $$n \ln n + \ln(nx_n - 1) = \mathrm{o}(1)$$
d'où, par continuité de l'exponentielle
$$n^n(nx_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi $$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^n}\right)}$$

Exercice 6 (Mines 2023)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{E}$$
sur $]\,0\,;{+\infty}\,[^2$ avec $(u, v) = (xy, x/y)$.

Corrigé : On note $\mathrm{U} = \,]\,0\,;{+\infty}\,[^2$. On cherche $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ solution de l'équation aux dérivées partielles (E). Notons $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, x + 2y)$ le changement de variables de U sur V avec $\mathrm{V} = \mathrm{U}$ (c'est un $\mathscr{C}^2$-*difféomorphisme* de U sur V, *i.e.* une bijection de $\mathscr{C}^2$ de U sur V dont la réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^2$). On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ \mathrm{V} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donc $f = \widetilde{f} \circ \varphi$. Avec la règle de la chaîne, on trouve
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = y\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = x\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} - \dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases}$$
Toujours avec la règle de la chaîne et en regroupant les dérivées croisées d'après le théorème de Schwarz, il vient
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\right) \\ &= y\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} \end{aligned}$$

puis $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\right) \\ &= x\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\frac{x}{y^3}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} - 2\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} + 2\frac{x}{y^3}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{aligned}$$
Ainsi, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff 2u\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = 0 \iff \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = a(v)\sqrt{u} \iff \widetilde{f}(u,v) = \mathrm{A}(v)\sqrt{u} + \mathrm{B}(u)$$

avec $a \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$, et A, B dans $\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{(x,y) \in \mathrm{U} \mapsto \mathrm{A}\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + \mathrm{B}(xy) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})^2\right\}}$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive et donner les propriétés d'une telle matrice.

   On pose $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{A}x, x\rangle - \langle x, b\rangle$$

2. Montrer que la fonction J est *strictement convexe*, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad \mathrm{J}(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y)$$

3. (a) Établir $$\mathrm{J}(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

   (b) En déduire que la fonction J atteint un minimum en unique point de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

Corrigé : 1. Une matrice M est *symétrique définie positive* si $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \qquad \mathrm{X}^\top \mathrm{AX} > 0$$

On dispose de la caractérisation spectrale suivante pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \,]\,0\,;+\infty\,[}$$

2. Soit $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$ et x, y dans $\mathbb{R}^n$ distincts. On pose $\Delta = \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y) - \mathrm{J}(\lambda x + (1-\lambda)y)$. Il vient

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{2}\left(\lambda \langle \mathrm{A}x, x\rangle + (1-\lambda)\langle \mathrm{A}y, y\rangle - \langle \mathrm{A}(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda x + (1-\lambda)y\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\lambda - \lambda^2)\langle \mathrm{A}x, x\rangle - 2\lambda(1-\lambda)\langle \mathrm{A}x, y\rangle + (1-\lambda-(1-\lambda)^2)\langle \mathrm{A}y, y\rangle\right) \\
\Delta &= \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\langle \mathrm{A}x, x\rangle - 2\langle \mathrm{A}x, y\rangle + \langle \mathrm{A}y, y\rangle\right) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\langle \mathrm{A}(x-y), x-y\rangle > 0
\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction J est strictement convexe.}}$$

3.(a) D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et les x_i réels, il vient

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}x, x\rangle &= \left\langle \mathrm{A}\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j \right\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \lambda_i \underbrace{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_1 \|x\|^2
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle b, x\rangle \leqslant \|b\|\|x\|$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$
$$\mathrm{J}(x) \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\|x\|^2 - \|b\|\|x\|$$

Et on conclut
$$\boxed{\mathrm{J}(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty}$$

3.(b) Comme $\mathrm{J}(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, on dispose de $\mathrm{R} \geqslant 0$ tel que, pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| > \mathrm{R}$, alors $\mathrm{J}(x) \geqslant \mathrm{J}(0)$. La fonction J continue car polynomiale atteint un minimum sur le compact $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ (fermé borné d'un espace de dimension finie). Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{J}(x) \geqslant \begin{cases} \operatorname*{Min}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} \mathrm{J} & \text{si } x \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R}) \\ \mathrm{J}(0) \geqslant \operatorname*{Min}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} \mathrm{J} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction J admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que celui-ci soit atteint en x et en y avec x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $x \neq y$. Alors, par stricte convexité, il vient

$$\forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{J}(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y)$$

ce qui contredit le fait que le minimum est atteint en x et y. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction J atteint un minimum en unique point de } \mathbb{R}^n.}$$

On conserve les notations introduites à la question 3.(a) et on note également $b = \sum_{i=1}^{n} b_i \varepsilon_i$ avec les b_i réels. Il vient pour $x \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

La fonction J est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ et on trouve par dérivation

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \partial_k \mathrm{J}(x) = \lambda_k x_k - b_k$$

d'où
$$\nabla \mathrm{J}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad x_k = \lambda_k^{-1} b_k \iff x = \mathrm{A}^{-1} b$$

Comme la fonction J atteint son minimum sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ en un point critique, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction J atteint son minimum en } \mathrm{A}^{-1}b.}$$

Remarque : La démarche imposée par l'exercice est inutilement compliquée. Soient x et h dans $\mathbb{R}^n$ avec $h \neq 0$. Le calcul direct donne

$$\mathrm{J}(x+h) - \mathrm{J}(x) = \langle \mathrm{A}x - b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{A}h, h\rangle$$

On a
$$\langle \mathrm{A}h, h\rangle \leqslant \lambda_n \|h\|^2 = \mathrm{o}(h)$$

Ainsi
$$\mathrm{J}(x+h) = \mathrm{J}(x) + \langle \mathrm{A}x - b, h\rangle + \mathrm{o}(h)$$

On en déduit la différentiabilité de J et $\nabla \mathrm{J}(x) = \mathrm{A}x - b$. L'unique point critique est $x_0 = \mathrm{A}^{-1}b$ et on a

$$\mathrm{J}(x_0 + h) = \mathrm{J}(x_0) + \frac{1}{2}\langle \mathrm{A}h, h\rangle > \mathrm{J}(x_0)$$

ce qui prouve que le point x_0 est un minimum strict et qu'il est l'unique extremum de J.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X_x une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $x > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x)$ puis établir

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit α réel et $u_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} x^n$ pour x réel.

2. (a) Préciser le domaine de définition de u_α.
   (b) Déterminer u_1 et u_2.

3. (a) Soit $\alpha < 0$. Montrer $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$

   (b) Soit $\alpha \in \left]-1\,;0\right[$. Établir $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x$

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon x)^2}\mathbb{V}(\mathrm{Y}_x) = \frac{1}{\varepsilon^2 x}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - x| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2.(a) Soit α. Pour n entier non nul, on a

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\alpha\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière définissant u_α est égal à $+\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } u_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$$

2.(b) La variable X_x est dans L^2. Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$$

d'où
$$u_1(x) = \mathrm{e}^x\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) \quad \text{et} \quad u_2(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathbb{V}(\mathrm{X}_x) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)^2\right)$$

Ainsi
$$\boxed{u_1(x) = x\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad u_2(x) = x(1+x)\mathrm{e}^x}$$

3.(a) Soit $\alpha < 0$. Pour n entier, on note $\mathrm{R}_n(x)$ le reste d'ordre n de la série définissant $\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$. On a

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k^{|\alpha|}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)^{|\alpha|}}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}}_{\leqslant \mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{|\alpha|}}$$

On dispose donc d'un contrôle uniforme du reste d'où $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et d'après le théorème de double limite, il vient

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!n^{|\alpha|}} = 0$$

Ainsi $$\boxed{\forall \alpha < 0 \qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)}$$

Remarque : La convergence normale échoue ici.

3.(b) Soit $\alpha \in \,]-1\,;0\,[$. On pose

$$\forall u \geqslant 0 \qquad \varphi(u) = \begin{cases} u^\alpha & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

La définition de $u_\alpha(x)$ garantit la convergence de la série $\sum \varphi(n)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n)$. Ainsi, par transfert, il vient

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n}{x}\right)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{x^\alpha n!}\mathrm{e}^{-x} = x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$$

Puis $$x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) - 1 = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)$$

Par inégalité triangulaire dans L^1, il vient

$$\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right)$$

On localise avec des fonctions indicatrices et on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right)$$

Comme la variable X_x est valeurs dans $\mathbb{N}$, on observe que

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{X}_x = 0 \\ \dfrac{x}{\mathrm{X}_x}^{|\alpha|} \leqslant x^{|\alpha|} & \text{si } \mathrm{X}_x \geqslant 1 \end{cases}$$

Par conséquent $$\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - 1\right| \leqslant 1 + x^{|\alpha|}$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right) \leqslant \left(x^{|\alpha|} + 1\right)\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{1-|\alpha|}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

Par continuité de φ en 1, pour $\delta > 0$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u > 0 \qquad |u - 1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(u) - \varphi(1)| < \delta$$

Ainsi $$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) \leqslant \delta$$

On peut donc rendre la quantité $\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\dfrac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right|$ arbitrairement petite pour $x \to +\infty$ et on conclut

$$\boxed{u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x}$$