Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2023)

On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$

1. La fonction f admet-elle des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On pose $\mathrm{K} = [\,0\,;1\,]^2$. Justifier que la fonction f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer
2. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble
$$\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, f \in \mathrm{E}\right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer sa valeur.

Exercice 3 (CCINP 2023)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer $$|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$$
2. Si $\det \mathrm{A} \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante vérifiant

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A}) f(\mathrm{B})$$

Montrer
$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(\mathrm{A}) \neq 0$$

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + \ldots + t^n}$$

Déterminer de trois façons différentes la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 2} \mathrm{I}_n$.

Exercice 7 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_n$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{Z}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k} \mathrm{X}_k$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant 3^n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant 2^n)$.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Rappeler les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle f(x), f(y) \rangle = c \langle x, y \rangle$;
   (b) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$ pour tout F sev de E.

Exercice 9 (Centrale 2023)

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{C})$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. On pose
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$
   et on étend cette définition au cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $r > 0$, on note
$$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$
   Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et f sa somme. Montrer
$$\forall a \in \mathbb{C} \qquad \forall r > |a| \qquad f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z$$
3. En déduire que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand, on a l'égalité
$$\exp(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{z} (z\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}\,\mathrm{d}z$$