Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.
2. On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que l'entier n est pair.
2. On suppose $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}$ est pair.

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$.

1. Montre que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{C}$.
2. Établir l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
3. Désormais, on suppose seulement que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que les résultats précédents demeurent. On pourra poser $$\mathrm{A}_{-1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1}\frac{z^n}{n!}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right] \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Centrale 2023)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[)$ croissante telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x} \quad \text{avec} \quad a > 0$$

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison puis trouver un équivalent de $\ln f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Déterminer le domaine de définition de $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\mathrm{e}^{-nx}$ puis déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer qu'il existe C réel tel que

$$u(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non nul. Exprimer $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ à l'aide des racines de P.
3. Soir $r > 0$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On suppose que le polynôme P ne s'annule pas sur le cercle $\mathscr{C}(0, r)$ du plan complexe. On pose

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \, \mathrm{d}t$$

Montrer que la quantité $\mathrm{N}_r(\mathrm{P})$ est égal au nombre de racines de P comptées avec multiplicité dans la disque $\mathrm{D}(0, r)$.