ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\, n$

   (a) Soit $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $\text{S} \in \left[\, 0\,; \frac{\pi}{2} \,\right]$.

   (b) Soit $x \in \left[\, 0\,; \frac{\pi}{2} \,\right]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme suit

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant u_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k + u_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   i. Écrire une fonction `suite(x,n)` qui renvoie $\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$.

   ii. Tester la fonction pour différentes valeurs de x et $n \in \{100, 1000, 10000\}$.

   iii. Conjecturer le comportement de la suite.

   (c) Démontrer la conjecture.

2. Soit $(u_n)_n$ vérifiant

$$(\text{H}) : \begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ (u_n)_n \text{ décroissante positive} \end{cases}$$

Soit $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $x \in [\,0\,;\lambda\,]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme précédemment. On pose

$$(\text{P}) : \forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$$

   (a) On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

   i. Montrer que $(u_n)_n$ vérifie (H).

   ii. Adapter la fonction `suite` et la tester pour $x \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$ et plusieurs valeurs de n.

   iii. La suite $(u_n)_n$ vérifie-t-elle (P) ? Justifier.

   (b) Déterminer une condition nécessaire suffisante sur $(u_n)_n$ pour qu'elle vérifie (P).

Corrigé : 1.(a) On a clairement

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \varepsilon_n u_n \leqslant u_n$$

et la série téléscopique $\sum u_n$ converge puisque $(\text{Arctan}\, n)_n$ admet une limite finie. Par sommation, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}\, n - \text{Arctan}\, 0$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \varepsilon_n u_n \text{ converge avec } \mathrm{S} \in [\,0\,;\lambda\,] \text{ où } \lambda = \dfrac{\pi}{2}.}$

1.(b).i On saisit :

```
def u(n):
    return np.arctan(n+1)-np.arctan(n)

def suite(x,n):
    res=0
    for k in range(n+1):
        eps=1
        if x<=res+u(k):
            eps=0
        res+=eps*u(k)
    return res
```

1.(b).ii On expérimente :

```
>>> [suite(.56,n) for n in [100,1000,10000]]
[0.5599339443580329, 0.55999950523120989, 0.55999999942273004]
>>> [suite(1.1,n) for n in [100,1000,10000]]
[1.0999701608014529, 1.0999998581851047, 1.0999999999952632]
>>> [suite(1.5,n) for n in [100,1000,10000]]
[1.4999936575245283, 1.4999999863580609, 1.4999999999975726]
```

1.(b).iii On conjecture $\boxed{\forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k = x}$

1.(c) Soit $x \in [\,0\,;\mathrm{S}\,]$. Pour n entier, on note $x_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$. D'après la conjecture, on aurait $x - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$ d'où $0 \leqslant x - x_n \leqslant \mathrm{R}_n$ avec $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Dans tout ce qui suit, on observe qu'il faut avoir $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier pour espérer faire tourner une récurrence. Montrons en premier lieu cette propriété. Soit n entier. On a

$$\tan u_n = \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \frac{1}{1+n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1)\right)$$

d'où $$u_n \leqslant \mathrm{R}_n$$

On note $$\mathscr{P}(n) : \quad 0 \leqslant x - x_n \leqslant \mathrm{R}_n$$

• **Initialisation :** Si $x \leqslant u_0$, alors $\varepsilon_0(x) = 0$ d'où $x_0 = 0 \leqslant x$ et $x \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{R}_0 = x_0 + \mathrm{R}_0$. Si $x > u_0$, alors $\varepsilon_0(x) = 1$ puis $x_0 = u_0 < x$ et $x_0 + \mathrm{R}_0 = \mathrm{S} \geqslant x$ ce qui clôt l'initialisation.

• **Hérédité :** Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Si $x \leqslant x_n + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1}(x) = 0$ d'où $x_{n+1} = x_n \leqslant x$ puis, sachant $u_{n+1} \leqslant \mathrm{R}_{n+1}$, on obtient

$$x \leqslant x_n + u_{n+1} = x_{n+1} + u_{n+1} \leqslant x_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1}$$

Si $x > x_n + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1}(x) = 1$ d'où $x_{n+1} = x_n + u_{n+1} < x$ et

$$x \leqslant x_n + \mathrm{R}_n = x_n + u_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1} = x_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1}$$

ce qui clôt la récurrence.

Le reste d'une série convergente étant une suite de limite nulle, on conclut

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k}$$

2.(a).i La série $\sum u_n$ converge par critère de Riemann et la suite $(u_n)_n$ est clairement décroissante positive d'où

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ vérifie (H).}}$$

2.(a).ii On saisit :

```
def u(n):
    return 2/3**(n+1)
```

On observe :

```
>>> suite(.25,10000)
0.24999999999999992
>>> suite(.5,10000)
0.33333333333333315
>>> suite(.75,10000)
0.7499999999999999
>>> suite(.95,10000)
0.9259259259259256
```

Il semble que la suite $(u_n)_n$ proposée ne vérifie pas la propriété (P).

2.(a).iii Soit $x = \dfrac{1}{2}$. On a $u_0 = \dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $\varepsilon_0(x) = 0$ puis $u_0 = 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ ne vérifie pas la propriété (P).}}$

2.(b) Avec la suite $(u_n)_n$ de l'exemple précédent, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{2}{3^{n+1}} = u_n$$

Il semble que la condition $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier soit nécessaire. Considérons une suite $(u_n)_n$ qui vérifie (P) sans vérifier $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier. Il existe donc N entier tel que $u_\mathrm{N} > \mathrm{R}_\mathrm{N}$. S'il existe $n \in [\![\,0\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ tel que $\varepsilon_n(x) = 1$, on aurait $x \geqslant u_n \geqslant u_\mathrm{N}$ par décroissance, ce qui est faux. Pour $x \in \,]\,\mathrm{R}_\mathrm{N}\,; u_\mathrm{N}\,[$, on a $\varepsilon_n(x) = 0$ pour tout $n \in [\![\,0\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ puis

$$x = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \varepsilon_n(x) u_n \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{R}_\mathrm{N}$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Soit } (u_n)_n \text{ vérifiant (H). On a } (u_n)_n \text{ vérifie (P) si et seulement si } u_n \leqslant \mathrm{R}_n \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Commentaire : On peut interpréter le résultat ainsi : pour pouvoir approcher n'importe quel nombre $x \in [\,0\,;\lambda\,]$, il faut que la décroissance de $(u_n)_n$ ne soit pas trop forte. Sinon, les contributions chargées par les ε_n égaux à 1 ne suffisent plus pour « recoller » à x.

Exercice 2 (Centrale 2019)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+x} - 1$.

1. (a) Tracer le graphe de f_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (b) Déterminer des valeurs approchées de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (c) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie la matrice A_n.
   (d) Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer la conjecture précédente.
3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]-1\,;+\infty[$ puis montrer que celle-ci est supérieure à n à partir d'un certain rang.
5. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$.
6. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de λ_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
f=lambda n,x:sum([k/(k+x) for k in range(1,n+1)])-1

tx=np.linspace(0,40,1000)
for n in range(3,9):
    tf=[f(n,x) for x in tx]
    plt.plot(tx,tf)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

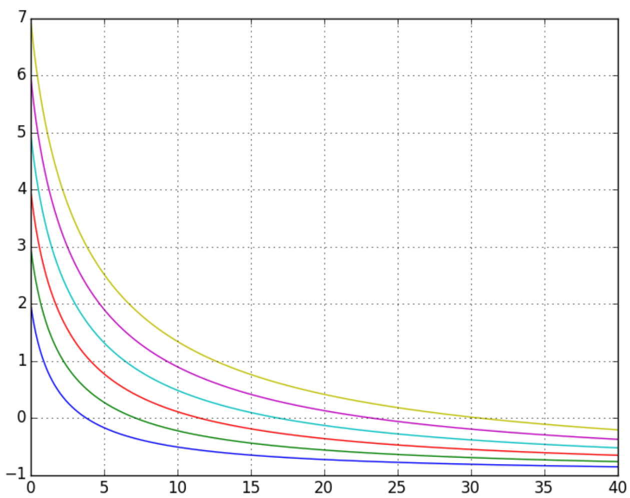

FIGURE 1 – Tracé des graphes de f_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$

1.(b) On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:f(n,x),0)[0]

for n in range(3,9):
    print("x(",n,")=",x(n))
```

On obtient :

```
x( 3 )= 3.76643548385
x( 4 )= 7.10619620421
x( 5 )= 11.4423101591
x( 6 )= 16.7770281674
x( 7 )= 23.1111133504
x( 8 )= 30.4448774786
```

1.(c) On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            res[i,j]=j+1
        res[j,j]=0
    return res
```

1.(d) On saisit :

```
n= 3
sp= [ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]

n= 4
sp= [ 7.1061962  -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
...
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$

2. Soit n entier non nul. Avec les opérations $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k - \mathrm{L}_1$ pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, notant χ_n le polynôme caractéristique de A_n, on obtient

$$\chi_n = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -2 & \dots & \dots & -n \\ -1-\mathrm{X} & \mathrm{X}+2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ -1-\mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X}+n \end{vmatrix}$$

En considérant $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{k}{x+k} \mathrm{L}_k$, on obtient

$$\chi_n(x) = \left[x - (x+1) \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{x+k} \right] \prod_{k=2}^{n} (x+k)$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = -f_n(x) \prod_{k=1}^{n} (x+k)}$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ avec $f_n(0) = n-1 > 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$. La fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-1\,;n-1]$ d'où l'existence et unicité d'une racine de f_n sur $\mathbb{R}_+$. D'après la relation obtenue entre χ_n et f_n, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \operatorname{Sp}(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$$

3. Soit n entier non nul. D'après la relation précédemment obtenue, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = 0 \iff f_n(x) = 0$$

Une étude de fonction montre que f_n décroît strictement avec $f_n(x) \xrightarrow[x \to -k^+]{} +\infty$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to -k^-]{}$ $-\infty$ pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$ et $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$. On en déduit que f_n s'annule exactement une fois sur chaque intervalle $]-k\,; -(k-1)[$ pour $k \in [\![2\,; n]\!]$, exactement une fois sur $]-1\,; +\infty[$ et pas sur $]-\infty\,; -n[$. Ainsi, la fonction f_n admet n racines distinctes sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ qui sont également racines de χ_n. Comme χ_n est un polynôme de degré n, les racines de f_n sont toutes les racines de χ_n. Par condition suffisante, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, la matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable.}}$$

4. Soit n entier non nul. L'étude de fonction montre que f_n admet une unique racine sur $]-1\,; +\infty[$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ admet une unique valeur propre } \lambda_n \in \,]-1\,; +\infty[.}$$

On a $$f_n(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n} - 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n} - 1 = \frac{n+1}{4} - 1$$

D'où $$f_n(n) \geqslant 0 \iff n \geqslant 3$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 3 \qquad \lambda_n \geqslant n}$$

5. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda_n} \iff \frac{n(n+1)}{2(\lambda_n+n)} \leqslant 1 \leqslant \frac{n(n+1)}{2\lambda_n}$$

d'où $$\frac{n(n+1)}{2} - n \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

On en déduit $$\boxed{\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}}$$

Remarque : On a $$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant n \iff n \geqslant 3$$

La minoration obtenue est donc meilleure que celle établie à la question précédente.

6. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} = 1 \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda_n} \left(1 + \frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} = 1$$

On a $$(1+u)^{-1} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + \mathrm{o}(u) = 1 - u + u\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$$

Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on obtient

$$\left(1+\frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k}{\lambda_n}\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right) \quad \text{avec} \quad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,]\,0\,;\frac{n}{\lambda_n}\,]} = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} k - (1+\mathrm{o}(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\lambda_n}$$

d'où $\displaystyle \lambda_n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\left(\frac{2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{n^3}{3}+\mathrm{o}(n^3)\right)(1+\mathrm{o}(1)) = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{2}{3}n+\mathrm{o}(n)$

On conclut
$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}$$

Remarque : Avec du courage et du temps, on peut améliorer la précision du développement asymptotique. On a $(1+u)^{-1} = 1-u+u^2+u^2\varepsilon(u)$ puis

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \sum_{k=1}^{n} k\left[1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k^2}{\lambda_n^2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{k^2}{\lambda_n}\right)\right)\right]\\ &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\underbrace{\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}(1+\mathrm{o}(1))\end{aligned}$$

On obtient
$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}-\frac{2}{9}+\mathrm{o}(1)}$$

On saisit :

```
tn=range(1,100)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx)
plt.grid();plt.show()

tn=range(100,200)
tx=[x(n) for n in tn]
print("\nRégression parabolique=",np.polyfit(tn,tx,2))
```

On observe :

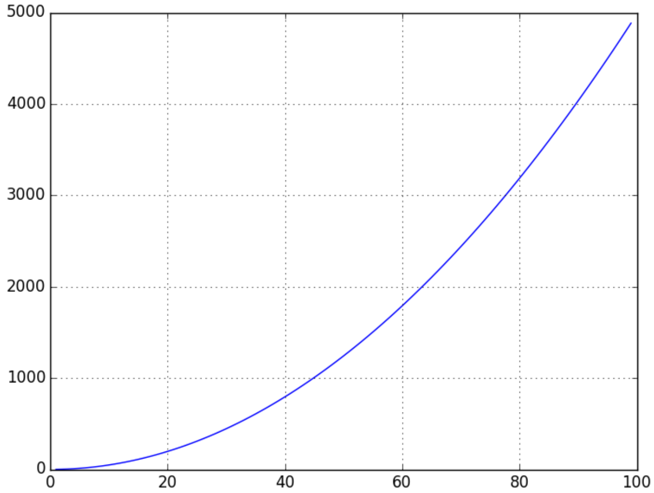

FIGURE 2 – Tracé de $(\lambda_n)_n$

et on obtient :

```
Régression parabolique= [ 0.50000001 -0.16667039 -0.22166145]
```

Exercice 3 (Centrale 2015)

1. Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}/n$ où $\mathrm{Y} \sim \mathscr{B}(n,p)$.
2. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

   Soit $t > 0$ et $x \in [-1\,;1]$.

3. Montrer $$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$$
4. On considère X variable aléatoire telle que $|\mathrm{X}| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. Pour $t > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
5. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on ait $|\mathrm{X}_i| \leqslant a_i$. On poser $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Montrer $$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
6. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
7. En déduire $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon}{2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$$

8. Commenter le résultat observé à la deuxième question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def S(n,p):
    return rd.binomial(n,p)/n

def test(n,p):
    tk=range(1,n+1)
    tS=[S(k,p) for k in tk]
    tp=[p+np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    tm=[p-np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    plt.plot(tk,tS,'bo--');plt.plot(tk,tp,'r--');plt.plot(tk,tm,'r--')
    plt.grid();plt.show()
```

On observe :

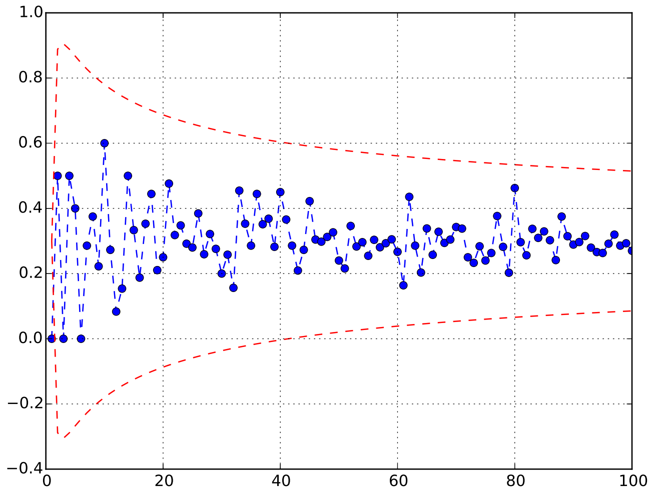

FIGURE 3 – Tracé des suites $(\mathrm{S}_n)_n$, $\left(p+\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\right)_n$, $\left(p-\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\right)_n$

On conjecture que

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)_n \text{ semble presque sûrement coincée entre les deux autres suites.}}$$

3. Soit $(t,x)\in\mathbb{R}\times[\,0\,;1\,]$. On a

$$tx=\frac{1}{2}(1-x)(-t)+\frac{1}{2}(1+x)t$$

avec $$\frac{1}{2}(1-x),\frac{1}{2}(1+x)\geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(1+x)=1$$

Par convexité de l'exponentielle, on trouve

$$\boxed{\mathrm{e}^{tx}\leqslant\frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}}$$

4. Soit t réel. On a $0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^t$ et par comparaison, la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie. Avec l'inégalité précédemment obtenue, il vient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \frac{1}{2}(1-\mathrm{X})\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+\mathrm{X})\mathrm{e}^{t}$$

Puis, par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que X est une variable centrée, on trouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \operatorname{ch} t$. Enfin, on a les développements en série entières

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Par récurrence, on montre que $2^n n! \leqslant (2n)!$ pour tout n entier et on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

5. Soit t réel. Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, on pose $\mathrm{U}_i = \mathrm{X}_i / a_i$. On a

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t a_i \mathrm{U}_i}$$

avec les U_i vérifiant les hypothèses de la question 4. Ainsi, les variables $\mathrm{e}^{t a_i \mathrm{U}_i}$ sont d'espérance finie et le produit de variables indépendantes d'espérance finies est d'espérance finie. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t a_i \mathrm{U}_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t a_i \mathrm{U}_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{t^2 a_i^2}{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t \geqslant 0$, on a après transformation de Chernoff et inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{t\varepsilon}) \leqslant \mathrm{e}^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n})$$

Et avec l'inégalité précédente, on conclut

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}$$

7. On choisit t qui minimise le trinôme $t \mapsto -t\varepsilon + \dfrac{t^2}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ et on obtient

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)}$$

8. En considérant $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - p)$ avec les X_i indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, on a $|\mathrm{X}_i - p| \leqslant 1$ et par application de l'inégalité précédente, pour $\alpha > \sqrt{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n}) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\ln n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

Ainsi, pour $\alpha > \sqrt{2}$, la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli (résultat non exigible en principe, classique mais difficile), on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n} \quad \text{infiniment souvent}\right) = 0$$

d'où $\qquad \mathrm{T}_n \leqslant \alpha\sqrt{n}\ln n \quad$ à partir d'un certain rang $\quad$ presque sûrement

Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on en déduit que l'événement

$$\bigcap_{\alpha \in \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[\cap\mathbb{Q}} \left\{\mathrm{T}_n \leqslant \alpha\sqrt{n}\ln n \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\}$$

est presque sûr, autrement dit

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n \leqslant \sqrt{2n}\ln n \quad \text{à partir d'un certain rang}\right) = 1$$

ce qui équivaut, avec les notations de la première question, à $\mathrm{S}_n - p \leqslant \sqrt{2\dfrac{\ln n}{n}}$ à partir d'un certain rang presque sûrement. Par un argument symétrique, on peut obtenir une minoration de la même forme et on conclut

$$\boxed{\text{Presque sûrement, à partir d'un certain rang, on a } \mathrm{S}_n \in \left[p - \sqrt{2\frac{\ln n}{n}}\,;p + \sqrt{2\frac{\ln n}{n}}\right].}$$

Remarque : il y a un facteur $\sqrt{2}$ en trop qu'on ne semble pas pouvoir améliorer en suivant la démarche du sujet, à moins que la conclusion attendue soit tout simplement d'annoncer que l'événement $\left\{\mathrm{S}_n \in \left[p - \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\,;p + \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\right]\right\}$ a une probabilité proche de 1 pour n grand, ce qui éviterait le recours (surréaliste) au lemme de Borel-Cantelli en fin de planche ...