ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°4

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $\mathrm{R} > 0$?

Corrigé : Exercice 15 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé : Exercice 67 CCPINP 2023

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit N entier non nul, $p \in \,]0\,;1[$, $q = 1 - p$. On considère $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Pour $i \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$ et n entier non nul, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$.
   (a) Pour n entier non nul, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > n)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Corrigé : Exercice 102 CCINP 2023

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

On considère la suite de fonctions $(u_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathrm{id}$ et $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$ pour n entier.

1. Étudier la convergence simple de $(u_n)_n$.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x + x$

On va réduire le domaine d'étude pour déterminer le comportement de $(u_n)_n$. On vérifie par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad u_n(-x) = -u_n(x) \qquad u_n(x + 2\pi) = u_n(x) + 2\pi$$

En effet, l'initialisation est vraie et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x) \qquad f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$$

d'où l'hérédité. Il suffit donc d'étudier le comportement de $u_n(x)$ pour $x \in [\,0\,;\pi\,]$. Par imparité, on en déduit le comportement sur $[\,-\pi\,;0\,]$ et par translation, on en déduit le comportement sur tout intervalle translaté de la forme $[\,-\pi + 2k\pi\,;\pi + 2k\pi\,]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$$

d'où la croissance de f sur $[\,0\,;\pi\,]$ avec $f([\,0\,;\pi\,]) \subset [\,0\,;\pi\,]$. On a également

$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad f(x) - x = \sin x \geqslant 0$$

On en déduit que pour $x \in [\,0\,;\pi\,]$, la suite $(u_n(x))_n$ qui vérifie $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$ pour n entier est à valeurs dans $[\,0\,;\pi\,]$ et croissante. Par limite monotone, elle converge vers un point fixe de la fonction continue f et on a pour $t \in [\,0\,;\pi\,]$

$$f(t) = t \iff \sin t = 0 \iff t \in [\,0\,;\pi\,]$$

On a $u_n(0) = 0$ pour tout n entier par imparité. Pour $x \in \,]\,0\,;\pi\,]$, comme la suite $(u_n(x))_n$ croît avec $u_0(x) = x > 0$, on en déduit que $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} u \quad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) = \begin{cases} (2k+1)\pi & \text{si } x \in \,]\,2k\pi\,;2(k+1)\pi\,[\quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x & \text{sinon} \end{cases}}$$

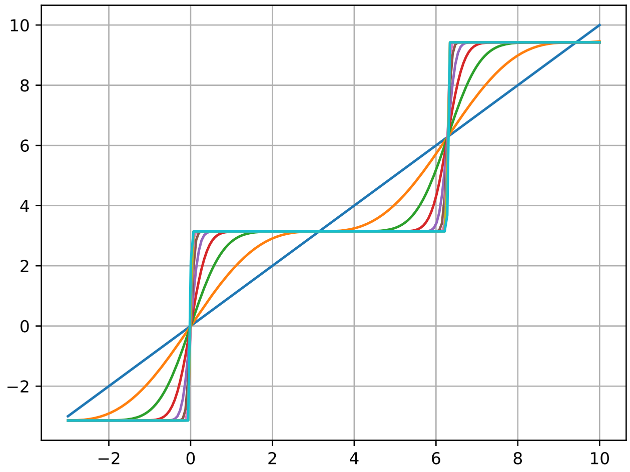

FIGURE 1 – Tracé de la suite de fonctions $(u_n)_n$

2. Par récurrence, on vérifie que la suite $(u_n)_n$ est une suite de fonctions continues puisque $u_{n+1} = f \circ u_n$ continue par composition si u_n l'est. Si la suite $(u_n)_n$ converge uniformément, alors sa limite uniforme est continue ce qui n'est pas le cas. On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{CU}}{\not\longrightarrow}} u}$$

Par récurrence, on montre que les fonctions u_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$. L'initialisation est vraie avec $u_0 = \mathrm{id}$ et pour $x \leqslant y$, si $u_n(x) \leqslant u_n(y)$ avec n entier fixé, alors il vient

$$f(u_n(y)) = u_{n+1}(x) \leqslant u_{n+1}(y) = f(u_n(y))$$

ce qui prouve l'hérédité. Soit $a \in \,]\,0\,;\pi\,]$. Pour $x \in \,]\,0\,;\pi\,]$, on sait que $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$ et comme la suite $(u_n(x))_n$ croît, elle tend vers π par valeurs inférieures. Ainsi, pour n entier, on a

$$\|u_n - u\|_{\infty,[\,a\,;\pi\,]} = \operatorname*{Sup}_{x\in[\,a\,;\pi\,]} |u_n(x) - \pi| = \pi - u_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Avec l'imparité des u_n et la propriété $u_n(\cdot + 2\pi) = u_n + 2\pi$, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} \,]\,2k\pi\,;2(k+1)\pi\,[.}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2023)

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f,x) \in \mathrm{E}\times[\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ et calculer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Corrigé : Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [\,0\,;1\,]$. L'intégrande $t \mapsto \min(x,t)f(t)$ est continu (par morceaux) sur le segment $[\,0\,;1\,]$ ce qui prouve que $\mathrm{T}(f)(x)$ est bien défini. L'application $\mathrm{T}(f)$ est linéaire par bilinéarité du produit et de l'intégrale. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(f)(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental d'intégration, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ (de classe $\mathscr{C}^1$ en fait) et on en déduit que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. Puis, par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}|\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^x t\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t\\ |\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \left(\frac{x^2}{2} + x(1-x)\right)\|f\|_\infty\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + x(1-x) = \dfrac{x}{2}(2-x)$ atteint son maximum sur $[\,0\,;1\,]$ en $x = 1$ et on obtient

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien de $\mathrm{T}(f)$ en 0_{E}. Enfin, pour $f = \mathbb{1} \in \mathrm{E}$, il vient pour $x \in [\,0\,;1\,]$

$$|\mathrm{T}(f)(x)| = \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \mathrm{d}t = \frac{x}{2}(2-x)$$

d'où
$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{2}}$$

Remarque : On aurait pu invoquer la continuité sous l'intégrale pour établir $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ pour $f \in \mathrm{E}$ mais cette démarche demande un effort spécifique contrairement à l'approche présentée ci-avant.

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $(\mathrm{G}, +)$ un groupe abélien d'ordre pq avec p et q des nombres premiers distincts.

1. Montrer que le groupe $(\mathrm{G}, +)$ est cyclique.
2. Trouver un contre-exemple dans le cas non abélien.

Corrigé : 1. On commence par énoncer un résultat hors-programme qui semble difficile à contourner pour résoudre l'exercice :

Théorème 1 (Théorème de Lagrange). *Soit* G *un groupe fini et* H *un sous groupe de* G. *Alors, on a*

$$\text{Card H}|\,\text{Card G}$$

Démonstration. On définit une relation binaire pour $(x, y) \in \mathrm{G}^2$ par

$$x\mathcal{R}y \iff y \in x\mathrm{H} = \{x \star h, h \in \mathrm{H}\}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathrm{G}^3$. On a $x = x \star e \in x\mathrm{H}$ puis si $x\mathcal{R}y$ alors il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $y = x \star h$ d'où $x = y \star h^{-1}$, *i.e.* $y\mathcal{R}x$ et si $y\mathcal{R}z$, il existe $k \in \mathrm{H}$ tel que $z = y \star k$ d'où $z = (x \star h) \star k = x \star (h \star k)$ donc $x\mathcal{R}z$. Ainsi, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation forment une partition de G. Considérons des représentants de ces classes qu'on note $x_1, \ldots, x_p$. On a donc l'union disjointe $\mathrm{G} = \bigsqcup_{i=1}^{p} x_i\mathrm{H}$. Enfin, pour $x \in \mathrm{G}$, l'application $h \mapsto x \star h$ est une bijection de H vers xH. Ainsi

$$\text{Card G} = \sum_{i=1}^{p} \text{Card } x_i\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{p} \text{Card H} = p\,\text{Card H}$$

□

L'ordre d'un élément de G divise l'ordre de G et appartient donc à $\{1, p, q, pq\}$. S'il existe un élément d'ordre pq, c'est terminé. Considérons x un élément non nul d'ordre p (choix arbitraire). On a $o(x) < |\mathrm{G}|$ et on peut donc choisir $y \in \mathrm{G} \setminus \langle x\rangle$. Si $o(y) = pq$, c'est terminé. Supposons qu'il n'existe pas d'élément dans $\mathrm{G} \setminus \langle x\rangle$ d'ordre q. Par conséquent, on a $o(y) = p$. L'intersection $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle$ est un sous-groupe de $\langle x\rangle$ et de $\langle y\rangle$. D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de cette intersection est dans $\{1, p\}$. Si elle est d'ordre p, alors on a $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \langle x\rangle = \langle y\rangle$ ce qui est absurde puisque $y \notin \langle x\rangle$. On en déduit $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{0\}$. On montre sans difficulté

$$\langle x, y\rangle = \{kx + \ell y, (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$$

On peut alors vérifier que l'application

$$\Phi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \langle x\rangle \times \langle y\rangle & \longrightarrow & \langle x, y\rangle \\ (kx, \ell y),\ (k,\ell)\in\mathbb{Z}^2 & \longmapsto & kx+\ell y \end{array}\right.$$

est un isomorphisme. Le caractère morphisme est immédiat. L'application est clairement surjective. Puis, on a pour $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$

$$(kx,\ell y)\in \text{Ker }\Phi \iff kx+\ell y = 0 \iff kx = -\ell y \in \langle x\rangle\cap\langle y\rangle = \{0\}$$

d'où l'injectivité. Par conséquent, on a

$$|\langle x\rangle\times\langle y\rangle| = |\langle x, y\rangle|$$

On a $|\langle x, y\rangle| > p$ et $\langle x\rangle$ sous-groupe de $\langle x, y\rangle$ sous-groupe de G. Par conséquent, on a p diviseur strict de $|\langle x, y\rangle|$ diviseur de pq d'où $|\langle x, y\rangle| = pq$. Or, on a

$$|\langle x\rangle\times\langle y\rangle| = |\langle x\rangle|\times|\langle y\rangle| = p^2$$

ce qui contredit l'égalité établie avec l'isomorphisme Φ. Ainsi, l'hypothèse faite sur l'ordre de y est fausse et on dispose donc d'un $y\in \mathrm{G}\setminus\{x\}$ d'ordre q. On vérifie alors sans difficulté que l'élément $x+y$ est d'ordre pq. On conclut

$$\boxed{\text{Le groupe } (\mathrm{G},+) \text{ est cyclique.}}$$

2. Le groupe symétrique S_3 est d'ordre $6 = 2\times 3$ et n'est pas cyclique car il n'est pas abélien puisque

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Mines 2023)

Soit $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. On pose $\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n \qquad f(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-\|x\|^2}$

Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^n$ puis les déterminer.

Corrigé : Si la forme φ est nulle, la fonction f est constante nulle et c'est immédiat. On suppose φ non nulle. On dispose de $a = (a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ non nul tel que $\varphi = \langle\cdot, a\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \qquad |\varphi(x)| = |\langle x, a\rangle| \leqslant \|x\|\|a\|$$

d'où
$$\forall x\in\mathbb{R}^n \qquad |f(x)| \leqslant \|a\|\|x\|\mathrm{e}^{-\|x\|^2}$$

Ainsi
$$|f(x)| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0$$

On a
$$f(a) = \|a\|^2\mathrm{e}^{-\|a\|^2} > 0 \quad \text{et} \quad f(-a) = -f(a) < 0$$

On choisit $\mathrm{R}\geqslant\|a\|$ tel $f(-a)\leqslant f(x)\leqslant f(a)$ pour $\|x\| > \mathrm{R}$. La fonction f continue admet des extremums sur le compact $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ avec un maximum plus grand que $f(a)$ et un minimum plus petit que $f(-a)$ puisque a et $-a$ sont dans $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Si $\|x\|\leqslant\mathrm{R}$, on a

$$\operatorname*{Min}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f \leqslant f(x) \leqslant \operatorname*{Max}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f$$

et si $\|x\| > \mathrm{R}$, on a

$$\operatorname*{Min}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} \leqslant f(-a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) \leqslant \operatorname*{Max}_{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f$$

Ainsi, les extremums atteint par f sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ sont les extremums sur $\mathbb{R}^n$. Puis, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ comme composée de telles fonctions et les extremums cherchés sont donc parmi les points critiques. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Par dérivation, il vient pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \partial_i f(x) = (a_i - 2x_i \langle x, a\rangle)\, \mathrm{e}^{-\|x\|^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\nabla f(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] a_i = 2x_i \langle x, a\rangle$$

Un vecteur x solution de $\nabla f(x) = 0$ vérifie $\langle x, a\rangle \neq 0$. Sinon, on aurait $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui est faux. Par conséquent, il vient

$$\nabla f(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad x_i = \frac{a_i}{2\langle x, a\rangle}$$

Or, en injectant cette relation sur les x_i dans l'expression de $\langle x, a\rangle$, on obtient

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad x_i = \frac{a_i}{2\langle x, a\rangle} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{a_i}{2\langle x, a\rangle} \\ \langle x, a\rangle = \dfrac{\|a\|^2}{2\langle x, a\rangle} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{a_i}{2\langle x, a\rangle} \\ \langle x, a\rangle = \pm \dfrac{\|a\|}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On obtient
$$\nabla f(x) = 0 \iff x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$$

On trouve exactement deux points critiques donc l'un est le maximum et l'autre le minimum et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum et un minimum sur } \mathbb{R}^n\text{, respectivement en } \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|} \text{ et en } -\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}.}$$

Variante : On peut complètement se passer du calcul différentiel pour résoudre cet exercice. On a établi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad |f(x)| \leqslant \|a\|\psi(\|x\|) \quad \text{avec} \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad \psi(u) = u\mathrm{e}^{-u^2}$$

Après étude, on observe que la fonction ψ atteint ses bornes en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors, en prenant x colinéaire à a tel que $\|x\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$, il vient d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}\right) = \|a\| \operatorname{Max} \psi \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}\right) = -\|a\| \operatorname{Max} \psi$$

ce qui prouve que la fonction f y atteint respectivement ses bornes et uniquement en ces points puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte pour une famille liée.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Pour n entier non nul, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n et on pose $\mathrm{P}_n = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}(n)} p$.

1. Établir $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

2. (a) Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \binom{2n+1}{n} < 4^n$

   (b) Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_{2n+1} < 4^n \mathrm{P}_{n+1}$

3. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n < 4^n$

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$$

On pose $\qquad \mathscr{P}(n) : \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n}$

L'initialisation $\mathscr{P}(2)$ est vraie. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 2$ fixé. On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Puis, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}} > f4^{n+1}2\sqrt{n+1} &\iff (2n+1)\sqrt{n+1} > 2(n+1)\sqrt{n} \\ &\iff 4n^3 + 8n^2 + 5n + 1 > 4n^3 + 8n^2 + 4n \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n}$$

Remarque : Cette preuve ne permet pas de comprendre comment trouver une telle minoration. On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)}{(n!)^2} = \frac{2^{2n-1}}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$$

Or, on observe $\qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1 + \dfrac{1}{2k}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{4k^2} > 1 + \dfrac{1}{k}$

d'où $\qquad \binom{2n}{n} > \dfrac{2^{2n-1}}{n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}$

On obtient alors la minoration souhaitée.

2.(a) Soit n entier. On a

$$(1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} > \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n}$$

D'où $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \binom{2n+1}{n} < 4^n}$$

Variante : On a

$$\binom{2n+1}{n} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{k+1}\right) < 4^n$$

2.(b) On a $$\mathrm{P}_{2n+1} = \mathrm{P}_{n+1} \prod_{p \in \mathcal{P} \cap [\![n+2\,;\,2n+1]\!]} p$$

et $$n!\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k$$

d'où $$\prod_{p \in \mathcal{P} \cap [\![n+2\,;\,2n+1]\!]} p \quad \text{divise} \quad n!\binom{2n+1}{n}$$

Or, pour p premier dans $[\![n+2\,;\,2n+1]\!]$, on a $p \wedge n! = 1$ d'où $\left(\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p\right) \wedge n! = 1$. D'après le lemme de Gauss, il s'ensuit que $\prod_{p \in \mathcal{P} \cap [\![n+2\,;\,2n+1]\!]} p$ divise $\binom{2n+1}{n}$ et d'après le résultat de la question 2.(a), on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_{2n+1} < 4^n \mathrm{P}_{n+1}}$$

3. On procède par récurrence. Pour n entier non nul, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall k \in [\![1\,;\,2n]\!] \qquad \mathrm{P}_k < 4^k$$

La propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier non nul fixé. D'après le résultat de la question 2.(b) et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\mathrm{P}_{2n+1} < 4^n \mathrm{P}_{n+1} < 4^{2n+1}$$

Enfin, on observe que $\mathrm{P}_{2n+2} = \mathrm{P}_{2n+1}$ puisque l'entier $2n+2$ est pair et n'est donc pas premier.

Par conséquent, on a $$\mathrm{P}_{2n+2} = \mathrm{P}_{2n+1} < 4^{2n+1} < 4^{2n+2}$$

ce qui prouve l'hérédité et clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n < 4^n}$$

Exercice 9 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et $\mathrm{T}_n = \dfrac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{k(n^k-1)}{(n+k)!}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé : 1. Pour $\mathrm{X} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. Par indépendance, on a pour $t \in [\,0\,;1\,]$

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = \mathrm{e}^{n(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}(n)$ et par conséquent $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = n$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}(n) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n \text{ centrée réduite}}$$

2. On pose $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k(n) = \frac{k(n^k-1)}{(n+k)!}$$

Pour k entier, on a

$$\frac{u_{k+1}(n)}{u_k(n)} = \frac{(k+1)(n^{k+1}-1)}{k(n^k-1)} \frac{(n+k)!}{(n+k+1)!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n+k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

D'après le critère de d'Alembert, la série converge. Par linéarité car convergence des séries concernées, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k-n)(n^k-1)}{(n+k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k-1}{(n+k-1)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{k+1}-n}{(n+k)!}$$

Après changement d'indice, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{\ell=n-1}^{+\infty} \frac{n^{\ell-n+1}-1}{\ell!} - \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{n^{\ell-n+1}-n}{\ell!} = (n-1)\sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}$$

On conclut $$\boxed{\sum u_k(n) \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = (n-1)\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)}$$

3. Soit $x \geqslant 0$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant n + x\sqrt{n}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathrm{S}_n \geqslant n+x\sqrt{n}\}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{[\,n+x\sqrt{n}\,;+\infty\,[}(k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$$

On pose $$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad v_k(x) = \mathbb{1}_{\left[\,0\,;\frac{k-n}{\sqrt{n}}\,\right]}(x)\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

Ainsi $$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$$

Par conséquent, la série de fonctions $\sum v_k$ converge simplement et sa somme $x \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque ses points de discontinuité sont les $\dfrac{k-n}{\sqrt{n}}$ avec k entier et sont régulièrement espacés. Puis, on a

$$\sum \int_0^{+\infty} |v_k(x)| \,\mathrm{d}x = \sum \frac{k-n}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

dont on vérifie la convergence sans difficulté. Ainsi, par intégration terme à terme, il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_k(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-n}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$$

avec un transfert pour la dernière égalité. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n \geqslant x) \,\mathrm{d}x = \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = 0}$$

Exercice 10 (ENS 2023)

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $|a_i| \geqslant 2$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$.

1. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec
$$\forall (i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que la matrice A est inversible et que son déterminant a même signe que $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.
2. Montrer que le résultat précédent vaut encore si l'on remplace la condition $a_{i,j} = 1$ pour $|i-j| = 1$ par $|a_{i,j}| \leqslant 1$ pour $|i-j| = 1$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant de A. Avec l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \dfrac{1}{a_1}\mathrm{L}_1$, on obtient
$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \mathrm{D}\left(a_2 - \frac{1}{a_1}, a_3, \ldots, a_n\right)$$

Sous réserve qu'on puisse définir la suite $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $d_1 = 1$ et $d_{i+1} = a_i - \dfrac{1}{d_i}$ pour $i \in [\![1\,; n-1]\!]$, on obtient
$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

En posant $\delta_i = \dfrac{d_i}{a_i}$ pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, il vient
$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i$$

avec $$\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1\,; n-1]\!] \qquad \delta_{i+1} = 1 - \frac{1}{a_{i+1} a_i \delta_i}$$

On pose $$\forall i \in [\![1\,; n-1]\!] \qquad f_i(x) = 1 - \frac{1}{a_{i+1} a_i x} \quad \text{et} \quad g_i(x) = x^2 - x + \frac{1}{a_{i+1} a_i}$$

Pour $i \in [\![1\,; n-1]\!]$, on n'a pas *a priori* l'inclusion $f_i(]\,0\,; +\infty\,[) \subset]\,0\,; +\infty\,[$ puisque si $a_{i+1} a_i > 0$, alors $f_i(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$. Il faut donc procéder plus finement.

Soit $i \in [\![1\,; n-1]\!]$. On suppose $a_{i+1} a_i > 0$. Pour $x > 0$, on a
$$f_i(x) \geqslant x \iff g_i(x) \leqslant 0$$

La fonction g_i est un trinôme de discriminant
$$\Delta_i = 1 - \frac{4}{a_{i+1} a_i} \geqslant 0$$

On pose $m_i = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta_i}}{2}$ et on remarque sans difficulté $\dfrac{1}{2} \leqslant m_i < 1$. Si $a_{i+1} a_i < 0$, on pose simplement $m_i = 1$. On choisit ensuite $m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n-1}{\mathrm{Min}}\, m_i$ qui vérifie notamment $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$. Montrons pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$ l'implication
$$x \geqslant m \implies f_i(x) \geqslant m$$

On observe en premier lieu que $f_i(x)$ est bien défini pour $x \geqslant m > 0$. Supposons $a_{i+1}a_i < 0$, alors pour $x \geqslant m$, on a

$$f_i(x) = 1 - \frac{1}{a_{i+1}a_i x} \geqslant 1 \geqslant m$$

Supposons désormais $a_{i+1}a_i > 0$. Par croissance de f_i, on a

$$x \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad f_i(x) \geqslant f_i(m)$$

La motivation du choix de m va apparaître clairement. On a $m_i = f_i(m_i) \geqslant m_i$ et on souhaite pouvoir annoncer la même inégalité avec m en lieu et place de m_i. On a l'équivalence

$$f_i(m) \geqslant m \iff 0 \geqslant g_i(m)$$

Or, par choix de m, on a

$$\frac{1 - \sqrt{\Delta_i}}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant m \leqslant \frac{1 + \sqrt{\Delta_i}}{2}$$

Le point m est donc entre les racines (pas forcément distinctes) de g_i d'où $g_i(m) \leqslant 0$ et par conséquent, on a bien

$$x \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad f_i(x) \geqslant f_i(m) \geqslant m$$

On construit alors proprement la suite $(\delta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On pose $\delta_1 = 1$ puis

$$\forall i \in [\![1\,;n-1]\!] \qquad \delta_{i+1} = f_i(\delta_i)$$

On a $\delta_1 \geqslant m$. Puis supposons $\delta_i \geqslant m$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$. La quantité $f_i(\delta_i)$ est bien définie puisque $\delta_i > 0$ et on a $\delta_{i+1} = f_i(\delta_i) \geqslant m$. Ainsi, on obtient

$$\det \mathrm{A} = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i \quad \text{avec} \quad \prod_{i=1}^{n} |a_i| \geqslant 2^n \neq 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \delta_i > 0$$

On conclut $\boxed{\text{La matrice A est inversible et } \det \mathrm{A} \text{ de même signe que } \prod_{i=1}^{n} a_i.}$

2. On note désormais

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \dfrac{\beta_1}{a_1}\mathrm{L}_2$, on trouve

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = a_1\mathrm{D}(a_2 - \frac{\alpha_1\beta_1}{a_1},\ldots,a_n,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})$$

et sous réserve de bonne définition, on obtient

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i$$

avec $\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1\,;n-1]\!] \qquad \delta_{i+1} = 1 - \dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i\delta_i}$

Il suffit alors de reprendre la même trame qu'à la question 1 en remplaçant $\dfrac{1}{a_{i+1}a_i}$ par $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$ et la discussion sur le signe de $a_{i+1}a_i$ en discussion sur le signe de $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$. Pour $i \in [\![1\,; n-1]\!]$ et $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i} > 0$, on trouve comme discriminant pour $g_i : x \mapsto x^2 - x + \dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$

$$\Delta_i = 1 - \frac{4\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i} \geqslant 0$$

Le reste de l'étude est alors identique. On conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible et } \det \mathrm{A} \text{ de même signe que } \prod_{i=1}^{n} a_i.}$$