ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°6

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $\mathrm{M} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_n$ est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   On admettra dans la suite de l'exercice que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. (a) Justifier que pour tout n entier, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver $$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Corrigé : Exercice 49 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$

1. On suppose $k \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

Corrigé : Exercice 89 CCPINP 2023

Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q dans $]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z} \leqslant \mathrm{X}$. En déduire que Z est d'espérance finie et déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.
2. Déterminer la loi de Z.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ d'où $0 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$, il s'ensuit que Z est d'espérance finie. Les variables X et $\dfrac{1}{\mathrm{Y}}$ sont indépendantes dans L^1 notamment car $0 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{Y}} \leqslant 1$ et il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{Y}}\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} q(1-q)^{k-1}$$

On a $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Z} \in \mathrm{L}^1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{Z}) = -\frac{q}{p(1-q)}\ln(q)}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $a \wedge b = 1$. D'après le lemme de Gauss, il vient

$$\left\{\mathrm{Z} = \frac{a}{b}\right\} = \{b\mathrm{X} = a\mathrm{Y}\} = \{\mathrm{X} \in a\mathbb{N}^*, \mathrm{Y} \in b\mathbb{N}^*, b\mathrm{X} = a\mathrm{Y}\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{\mathrm{X} = ak, \mathrm{Y} = bk\}$$

Ainsi, par σ-additivité et indépendance de X et Y, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z} = a/b) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = ak, \mathrm{Y} = bk) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = ak)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = bk) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{ak-1}q(1-q)^{bk-1}$$

On conclut $$\boxed{Pr(\mathrm{Z} = a/b) = \frac{pq(1-p)^{a-1}(1-q)^{b-1}}{1-(1-p)^a(1-q)^b}}$$

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

1. Établir $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$$

2. Déterminer un équivalent de $u_n - \dfrac{(\ln n)^2}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a

$$\frac{\ln k}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k+1)}{k}$$

d'où $$\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k}$$

Par sommation des relations de comparaison, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2}$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}}$$

2. On pose $$\forall x \geqslant 1 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

La fonction F est primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et est donc elle-même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$. Par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad \mathrm{F}''(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Soit $k \geqslant 1$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient

$$|\mathrm{F}(k+1)-\mathrm{F}(k)-\mathrm{F}'(k)| \leqslant \frac{1}{2}\|\mathrm{F}^{(2)}\|_{\infty,[k\,;k+1]}$$

avec $$\|\mathrm{F}^{(2)}\|_{\infty,[k\,;k+1]} \leqslant \frac{\ln(k+1)+1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Puis, il vient pour n entier non nul

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{F}(k+1)-\mathrm{F}(k)-\mathrm{F}'(k)) = \mathrm{F}(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{F}'(k) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Par critère de Riemann, il existe λ réel tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{F}'(k)-\mathrm{F}(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$$

c'est-à-dire $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} - \int_1^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \lambda + \mathrm{o}(1)$$

ou encore $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} - \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^{n+1} = \lambda + \mathrm{o}(1)$$

On a $$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $$\ln(n+1)^2 = \ln(n)^2 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} = \frac{\ln(n)^2}{2} + \lambda + \mathrm{o}(1)}$$

Remarque : La constante λ ne semble pas simple à déterminer ... Elle porte un nom : on l'appelle *constante de Stieljes*.

Exercice 5 (Mines 2023)

1. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $a_1,\ldots,a_n$ des réels vérifiant $a_1 < \ldots < a_n$ et la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$. On suppose que la fonction f s'annule n fois. Montrer $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
2. Soient $b_1,\ldots,b_n$ des réels vérifiant $b_1 < \ldots < b_n$ et $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que la matrice A est inversible.
3. Établir $$\det \mathrm{A} > 0$$

Corrigé : 1. On procède par récurrence. La propriété est immédiate pour $n=1$. On la suppose vraie pour n entier non nul fixé. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1},a_1,\ldots,a_{n+1}$ des réels avec $a_1 < \ldots < a_{n+1}$ tels que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\mathrm{e}^{a_k x}$ s'annule $n+1$ fois. Si $\lambda_{n+1}=0$, c'est immédiat par hypothèse de récurrence. Supposons $\lambda_{n+1} \neq 0$. On a pour x réel

$$f(x)=0 \iff \lambda_{n+1}\mathrm{e}^{a_{n+1}x}g(x)=0 \quad \text{avec} \quad g(x) = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\mathrm{e}^{(a_k-a_{n+1})x}$$

Par conséquent, la fonction g s'annule $n+1$ fois et d'après le théorème de Rolle, la fonction g' s'annule n fois avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathrm{e}^{b_k x} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mu_k = (a_k - a_{n+1}) \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}, \quad b_k = a_k - a_{n+1}$$

On a $b_1 < \ldots < b_n$ et par hypothèse de récurrence, on en déduit la nullité de μ_k et donc des λ_k pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et le résultat suit. On conclut

$$\boxed{\text{L'hypothèse faite sur la fonction } f \text{ implique } \lambda_1 = \ldots = \lambda_n.}$$

2. On écrit une combinaison linéaire nulles de lignes de A qui donne

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k b_j} = 0$$

avec les λ_k réels. Ainsi, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{a_k x}$ s'annule n fois d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. La famille des lignes est donc libre et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible.}}$$

3. On choisit $b_j = j - 1$ pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$. Alors, la matrice A est une matrice de Vandermonde et on trouve

$$\det \mathrm{A} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\mathrm{e}^{a_j} - \mathrm{e}^{a_i}) > 0$$

On pose $$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < \ldots < x_n\}$$

Il s'agit d'un convexe de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, l'image de Δ connexe par arcs par l'application continue $\varphi : (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \det \left(\mathrm{e}^{a_i b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas zéro d'après la question précédente. Le cas particulier précédent montre que $\mathrm{Im}\, \varphi \cap \,]\, 0\,; +\infty\, [\, \neq \varnothing$ et par conséquent $\mathrm{Im}\, \varphi \subset \,]\, 0\,; +\infty\, [$ et on conclut

$$\boxed{\det \mathrm{A} > 0}$$

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\; i+j=n} \frac{1}{i^2 j^2}$$

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ et calculer sa somme S.
3. Étudier la définition et continuité de S en R et $-$R.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 (n-k)^2}$$

Par décomposition en éléments simples, il vient pour $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$

$$\frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right]$$

puis $$\frac{1}{k^2 (n-k)^2} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k(n-k)} + \frac{1}{(n-k)^2} \right]$$

Avec des changements d'indices et la décomposition en éléments simples précédente, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k)} \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right] = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

Par comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$ décroissante positive, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et par conséquent

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\mathrm{o}(1)\right) + \frac{4\ln n}{n^3}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)$$

Ainsi
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{3n^2}}$$

2. Les séries entières $\sum z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ ont même rayon de convergence égal à 1 et par conservation du rayon de convergence pour le critère des équivalents, il vient

$$\boxed{\text{La série entière } \textstyle\sum u_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } \mathrm{R}=1.}$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

D'après le produit de Cauchy de séries entières, il vient pour $x \in\,]-1\,;1\,[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)^2$$

Pour $x \in\,]-1\,;1\,[\, \setminus \{0\}$, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

et par intégration de série entière, la formule valant aussi pour $x=0$

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \left(\int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

3. On a
$$|u_n(-1)^n| = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{3n^2}$$

Ainsi, les séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n$ convergent et d'après le théorème d'Abel radial, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction somme S est bien définie et continue sur } [\,-1\,;1\,].}$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une relation entre A, Com A et det A.

2. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\det \mathrm{A}$.

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.

(a) Montrer que la matrice A est inversible.

(b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Corrigé : 1.

$$\boxed{\mathrm{A}(\mathrm{Com}\,\mathrm{A})^\top = (\mathrm{Com}\,\mathrm{A})^\top \mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n}$$

2. On note $\Delta_n = \det \mathrm{A}$. On trouve en développant selon la première ligne pour $n \geqslant 3$

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

La suite $(\Delta_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2. On a $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ et on peut choisir $\Delta_0 = 1$ pour que la relation de récurrence soit compatibles pour $n = 2$. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

Ainsi, on a $\Delta_n = an + b$ pour tout n entier et avec $\Delta_0 = b = 1$ puis $\Delta_1 = a + b = 2$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Delta_n = n+1}$$

3.(a) Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ colonne non nulle telle que $\mathrm{AX} = 0$. On a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = a_{i,i}x_i + \sum_{j \in [\![1\,;\, n]\!] \setminus \{i\}} a_{i,j}x_j = 0$$

d'où
$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad a_{i,i}x_i = \sum_{j=1}^{n} - a_{i,j}x_j$$

On choisit $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \underset{i \in [\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_i|$. Il vient

$$a_{i_0,i_0} = |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j=1}^{n} - a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} - a_{i_0,j}\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \sum_{j=1}^{n} - a_{i_0,j}$$

ce qui contredit $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j} > 0$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible.}}$$

Remarque : Il s'agit d'un cas particulier de matrice à diagonale dominante stricte.

3.(b) On note $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(i_0, j_0) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tel que $b_{i_0,j_0} = \underset{1\leqslant i,j\leqslant n}{\mathrm{Min}}\, b_{i,j}$. On suppose $b_{i_0,j_0} < 0$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \delta_{i,j} \geqslant 0$$

En particulier, on obtient

$$a_{i_0,i_0}b_{i_0,j_0} \geqslant \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} \underbrace{(-a_{i_0,k})}_{\geqslant 0}\underbrace{b_{k,j_0}}_{\geqslant b_{i_0,j_0}} \geqslant b_{i_0,j_0}\sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} (-a_{i_0,k})$$

d'où
$$a_{i_0,i_0} \leqslant \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} (-a_{i_0,k})$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur la matrice A. On conclut

$$\boxed{\text{Les coefficients de } \mathrm{A}^{-1} \text{ sont positifs.}}$$

Exercice 8 (Centrale 2023)

Un $\mathbb{R}$-ev normé est dit *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

1. L'espace $\mathbb{R}$ est-il séparable ?
2. Montrer qu'un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie est séparable.
3. Soit E préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que l'espace E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_n$ telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_n$ est dense dans E.

Corrigé : 1. L'espace normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ contient l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ dénombrable dense. Ainsi

$$\boxed{\text{L'espace } \mathbb{R} \text{ est séparable.}}$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$$

On pose
$$\Lambda = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i e_i,\ (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n\right\}$$

L'application $\varphi : \mathbb{Q}^n \to \Lambda, (r_1, \ldots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ est clairement bijective et comme le produit fini $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on en déduit que l'ensemble Λ est dénombrable. Puis, on munit l'espace E de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{E}$ avec les x_i réels et $\varepsilon > 0$, on dispose de $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que $|r_i - x_i| < \varepsilon$ et il s'ensuit

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} r_i e_i\|_{\infty,\mathscr{B}} < \varepsilon$$

d'où
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \Lambda \neq \varnothing$$

ce qui prouve la densité de Λ dans E muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$. Or, on a invariance de l'adhérence et donc de la densité par rapport au choix d'une norme dans un espace de dimension finie par équivalence des normes. On conclut

$$\boxed{\text{Un } \mathbb{R}\text{-ev normé de dimension finie est séparable.}}$$

3. On suppose E séparable. Soit $(x_n)_n$ partie dénombre dense de E. On pose

$$i_0 = \mathrm{Min}\ \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 0_{\mathrm{E}}\}$$

et
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad i_{k+1} = \mathrm{Min}\ \{i \in \mathbb{N} \mid (x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}, x_i) \text{ libre}\}$$

L'entier i_0 est bien défini car si tous les x_i étaient nuls, la suite $(x_n)_n$ ne serait pas dense dans E. Supposons qu'il existe k entier tel que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid (x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}) \text{ libre}\}$ est vide. On en déduit que tout x_i est dans $\mathrm{Vect}\,(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$ d'où

$$\mathrm{Vect}\,(x_n)_n = \mathrm{Vect}\,(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$$

et par conséquent $\qquad \mathrm{E} = \overline{\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\mathrm{Vect}\,(x_n)_n} = \overline{\mathrm{Vect}\,(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})}$

Or, l'espace $\mathrm{Vect}\,(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$ est de dimension finie car il admet une famille génératrice finie et il s'ensuit que c'est un fermé de E, égal à son adhérence. On en déduit alors que l'espace E est de dimension finie ce qui est faux. Par conséquent, la suite $(i_k)_k$ est bien définie. Par construction, la suite $(x_{i_k})_k$ est libre et on l'orthonormalise en la famille $(e_k)_k$. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $(x_n)_n$, on dispose de n entier tel que $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Par récurrence, on établit $i_k \geqslant k$ pour tout k entier et il s'ensuit

$$x_n \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_{i_n}) = \mathrm{Vect}\,(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$$

Par conséquent, la famille $(e_n)_n$ est dense dans E. Supposons qu'il existe $(e_n)_n$ suite orthonormée telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_n$ est dense dans E. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$. On dispose de n entier et $(\alpha_k)_{k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\|x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$$

Pour $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, on choisit $r_k \in \mathbb{Q}$ tel que $|r_k - \alpha_k| < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|x - \sum_{k=0}^{n} r_k e_k\| \leqslant \|x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\| + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - r_k|\, \|e_k\| < (n+2)\varepsilon$$

avec ε qu'on peut choisir arbitrairement petit. Ainsi, notant

$$\Lambda = \left\{ \sum_{k=0}^{n} r_k e_k,\ n \in \mathbb{N},\ (r_k)_{k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]} \in \mathbb{Q}^{n+1} \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} r_k e_k,\ (r_k)_{k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]} \in \mathbb{Q}^{n+1} \right\}$$

on constate que Λ est une union dénombrable d'ensembles dénombrables (pour les mêmes raisons que celles exposées à la question 2) et est donc dénombrable. On a donc prouvé que l'ensemble Λ est une partie dénombrable dense dans E. On conclut

> L'espace E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_n$ telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_n$ est dense dans E.