ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral python - Feuille n°3

Exercice 1 (Centrale 2021)

Pour x réel, on pose sous réserve de convergence

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'équation différentielle sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G.
2. Tracer la courbe de F.
3. Tracer la courbe de G en expliquant pourquoi la méthode naïve ne convient pas. Faire une conjecture concernant F et G.
4. Soit ϕ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et $x_0 \in \mathrm{I}$. À l'aide du développement limité de ϕ, exprimer $\phi''(x_0)$ comme limite d'une expression faisant intervenir $\phi(x_0+h)$ et $\phi(x_0-h)$.
5. En admettant que F soit de classe $\mathscr{C}^2$, vérifier numériquement qu'elle satisfait l'équation (E).
6. Montrer que F et G sont continues sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
7. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
8. Montrer que F et G sont solutions de (E) puis que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.
9. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \qquad g(x,t) = \frac{\sin t}{x+t}$$

Pour x réel, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x < 0$, on a $1 \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(f(x,t))$ avec $t \mapsto 1$ d'intégrale divergente d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ également par comparaison de fonctions positives. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x < 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et une étude de convergence a donc du sens. On a $t \mapsto \dfrac{1}{x+t}$ et $t \mapsto 1 - \cos t$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$-\frac{1-\cos t}{x+t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1-\cos t}{x+t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, les intégrales $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1-\cos t}{(x+t)^2} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} \underset{t\to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies sur } \mathbb{R}_+.}$

2. On saisit :

```
F=lambda x:integr.quad(lambda t:np.exp(-x*t)/(1+t**2),0,np.inf)[0]

tx=np.linspace(0,10,100)
tF=[F(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tF)
plt.show()
```

On observe :

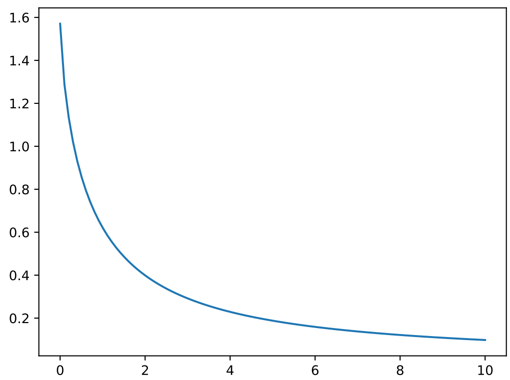

FIGURE 1 – Graphe de F

3. On saisit :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]

tG=[G(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tG)
plt.show()
```

On obtient l'avertissement :

```
Warning (from warnings module):
  File "D:/DRIVE CPGE/ORAUX/CENTRALE2/EX023.py", line 18
    G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]
IntegrationWarning: The integral is probably divergent, or slowly convergent.
```

On peut raisonnablement imaginer que l'avertissement vient du fait que l'intégrande définissant G n'est pas intégrable. Il s'agit d'un cas d'intégrale semi-convergente. On code plutôt :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,100)[0]
```

et en superposant les graphes de F et G, on observe :

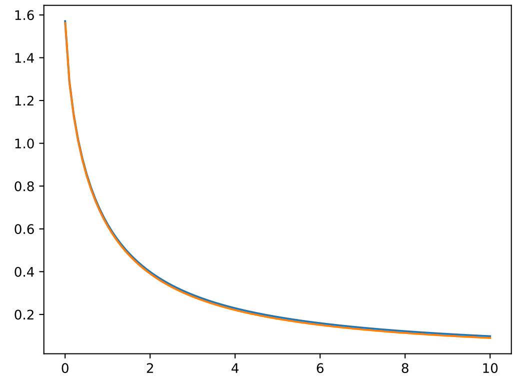

Figure 2 – Graphe de G

On conjecture $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$

4. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\phi(x_0 + h) \underset{h\to 0}{=} \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

$$\phi(x_0 - h) \underset{h\to 0}{=} \phi(x_0 - h) - \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

d'où $$\phi(x_0 + h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0 - h) = h^2\phi''(x_0) + \mathrm{o}(h^2)$$

Ainsi $$\boxed{\frac{\phi(x_0 + h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0 - h)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \phi''(x_0)}$$

5. On saisit :

```
h=1e-4
tx=np.linspace(.1,10,100)
tdiff=[F(x)+(F(x+h)-2*F(x)+F(x-h))/h**2-1/x for x in tx]
plt.plot(tx,tdiff)
plt.show()
```

On observe :

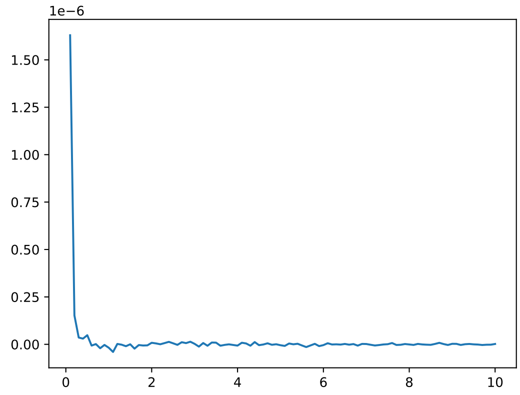

FIGURE 3 – Graphe d'une approximation de $x \mapsto \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) - \dfrac{1}{x}$

La simulation numérique conforte l'idée que la fonction F satisfait l'équation (E).

6. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \geqslant 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\ t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'après l'intégration par parties réalisée à la première question, il vient pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \left]\, 0\, ; +\infty \,\right[\qquad 0 \leqslant \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}$$

on établit sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies, continues sur } \mathbb{R}_+.}$$

7. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(\left]\, 0\, ; +\infty \,\right[, \mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Les intégrales $\mathrm{A}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{B}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent (intégration par parties). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = \cos x \mathrm{A}(x) - \sin x \mathrm{B}(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathscr{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec A′ et B′ de classe $\mathscr{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathscr{C}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

8. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

et avec $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{A}'(x) = -\dfrac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}'(x) = -\dfrac{\cos x}{x}$

on trouve finalement

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G vérifient } y'' + y = \frac{1}{x} \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

La fonction $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $\mathrm{F} - \mathrm{G} = a\cos + b\sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

et $\qquad \mathrm{G}(x) = \cos x \mathrm{A}(x) \sin x \mathrm{B}(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

Par suite $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc la fonction $a\cos + b\sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$$

Enfin, par continuité sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\mathrm{F}(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(0)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$

9. On a $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Et on conclut $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_n l'ensemble des matrices de E n'ayant pas de valeur propre réelle négative. On pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad f(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \int_0^1 \left(t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n\right)^{-1}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur P_n.
2. Écrire une fonction `exp(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une somme partielle de 100 termes de l'exponentielle de matrice.
3. Écrire une fonction `f(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une approximation de $f(\mathrm{A})$ par la méthode des rectangles.
4. Pour une matrice `A` aléatoire de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, afficher `A`, `f(exp(A))` et `exp(f(A))`. Que peut-on conjecturer ?

5. Montrer que l'application définie sur E par $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sous-multiplicative.
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$.
   (b) Écrire $f(\mathrm{A})$ comme la somme d'une série.
   (c) Établir $$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$$

Corrigé : 1. Pour $t \in \,]\,0\,;1\,]$, on a

$$t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n = t\left(\mathrm{A} - \left(1 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{I}_n\right) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant 0$$

Comme $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$, alors $1 - \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ ce qui prouve l'inversibilité de $\mathrm{A} - \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)\mathrm{I}_n$. Si $t = 0$, l'inversibilité est triviale. Puis, l'application $t \mapsto t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n$ est à coordonnées polynomiales et l'application inverse sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{M}^{-1} = (\det \mathrm{M})^{-1}(\mathrm{Com}\,\mathrm{M})^\top$$

est à coordonnées rationnelles bien définies. Par composition, l'intégrande $t \mapsto (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1}$ est à coordonnées rationnelles bien définies donc continue sur $[\,0\,;1\,]$ ce qui prouve que son intégrale est bien définie et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathrm{P}_n.}$$

2. On saisit :

```
def exp(A):
    res=0
    n=len(A)
    Ak=np.eye(n)
    ifk=1
    N=100
    for k in range(100):
        res+=Ak*ifk
        ifk*=1/(k+1)
        Ak=np.dot(Ak,A)
    return res
```

Remarque : Si on code un calcul de factorielle de type `int`, on a un message d'erreur lorsque la factorielle devient trop grande par incompatibilité de traitement avec le format flottant.

3. On saisit :

```
def f(A):
    res=0
    N=100
    n=len(A)
    In=np.eye(n)
    res=0
    for k in range(N):
        res+=alg.inv(k/N*(A-In)+In)
    res/=N
    return np.dot(A-In,res)
```

4. On obtient :

```
A=
[[0.39761672 0.35770479 0.11385846 0.2111241  0.13398998]
 [0.91653384 0.1626058  0.17657528 0.48891956 0.95765927]
 [0.09021453 0.95993874 0.24685814 0.98330557 0.02363415]
 [0.64953687 0.38009316 0.57009138 0.60737646 0.28604754]
 [0.59634937 0.30129783 0.46153225 0.51834649 0.64516309]]

f(exp(A))=
[[0.40272873 0.36100714 0.11635174 0.2154573  0.13785001]
 [0.92704995 0.17011338 0.18304863 0.49840525 0.9653767 ]
 [0.10164175 0.96655484 0.25293485 0.993369   0.03234894]
 [0.65897536 0.3883511  0.57583188 0.61757771 0.29259013]
 [0.60614636 0.30931106 0.46766505 0.52851636 0.6523825 ]]

exp(f(A))=
[[0.40219007 0.35630286 0.11431563 0.21186752 0.13536147]
 [0.91450988 0.17092476 0.1792869  0.49023589 0.95334371]
 [0.09723117 0.95442847 0.25341736 0.98022297 0.02954456]
 [0.64917226 0.38208868 0.56822318 0.61329381 0.2873005 ]
 [0.59679074 0.30376354 0.46107467 0.52004301 0.64844234]]
```

On conjecture $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad \exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}}$

Remarque : En faisant plusieurs essais, il ne semble pas raisonnable de conjecturer $f(\exp(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$. En fait, si on considère la fonction f comme un *logarithme matriciel*, il ne devrait pas avoir unicité d'un tel choix puisque par exemple

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad \exp(\mathrm{A}) = \exp(\mathrm{A} + \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{I}_{n-2}\right)$$

5. L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Il en résulte que $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sur E. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$$

Ainsi $$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right] = \left(\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n} b_{k,j}^2\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})} \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$$

6.(a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{M}) \cap \mathbb{R}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. On pose la matrice $\mathrm{M} = \big(\mathrm{X}|0|\ldots|0\big)$. On a $\mathrm{AM} = \lambda \mathrm{M}$ d'où $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M} = (\lambda - 1)\mathrm{M}$. Puis, par sous-multiplicativité de la norme, il vient

$$\|(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M}\| = |\lambda - 1| \, \|\mathrm{M}\| \leqslant \|\mathrm{A} - \mathrm{I}\| \|\mathrm{M}\| < \|\mathrm{M}\|$$

et comme $\mathrm{M} \neq 0_{\mathrm{E}}$, il vient $\|\mathrm{M}\| > 0$ par séparation et on en déduit $|\lambda - 1| < 1$, *i.e.* $\lambda \in]\,0\,;2\,[$.

On conclut $\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n}$

6.(b) Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{B}\| < 1$. Une récurrence immédiate donne $\|\mathrm{B}^k\| \leqslant \|\mathrm{B}\|^k$ pour tout k entier non nul puis, en considérant les sommes partielles, on établit

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = \mathrm{I}_n$$

On a $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\| = t\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$$

En appliquant le résultat préliminaire, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

On pose $$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_k(t) = t^k(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

Les u_k sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_k\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} \|t^k(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\| = \|(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\| \leqslant \|\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\|^k$$

La série géométrique $\sum \|\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\|^k$ converge et on en déduit que la série de fonctions continue $\sum u_k$ converge normalement dont uniformément sur $[\,0\,;1\,]$. On intègre terme à terme et il vient

$$\int_0^1 (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

On conclut $$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1) \qquad f(\mathrm{A}) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k}$$

Remarque : Le résultat vaut trivialement pour une matrice diagonale $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|1 - \lambda_i| < 1$ pour tout $i \in [\![\,1\,;n\,]\!]$.

6.(c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$. On note $\mathrm{I}_z = \left]-\dfrac{1}{|z|}\,;\dfrac{1}{|z|}\right[$ puis

$$\forall t \in \mathrm{I}_z \qquad \varphi(t) = (1 - tz)\mathrm{e}^{\psi(t)} \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(tz)^k}{k}$$

et $$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I}_z \qquad v_k(t) = \frac{(tz)^k}{k}$$

Les v_k sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\sum v_k(t)$ qui converge absolument sur I_z. Par dérivation, on a $v_0' = 0$ et

$$\forall (k,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I}_z \qquad v_k'(t) = t^{k-1} z^k$$

Pour $a \left[\,0\,;\dfrac{1}{|z|}\right[$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|v_k'\|_{\infty,[\,-a\,;a\,]} = |z|\,|az|^{k-1}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum v_k$ sur tout segment de I_z ce qui prouve la dérivabilité de la somme ψ. Enfin, pour une fonction $g = a + \mathrm{i}b : \mathrm{I}_z \to \mathbb{C}$, on a pour $t \in \mathrm{I}_z$

$$\exp(g(t)) = \exp(a(t) + \mathrm{i}b(t)) = \mathrm{e}^{a(t)}(\cos b(t) + \mathrm{i}\sin b(t))$$

On en déduit la dérivabilité de $\exp\circ g$ sur I_z et par dérivation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\circ g(t)\right] = g'(t)\exp\circ g(t)$$

Par suite, la fonction φ est dérivable sur I_z et on trouve par dérivation

$$\begin{aligned}\forall t\in \mathrm{I}_z \qquad \varphi(t) &= -z\mathrm{e}^{\psi(t)} + (1-tz)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}z^k\right)\mathrm{e}^{\psi(t)}\\ &= -z\mathrm{e}^{\psi(t)} + (1-tz)\left(\frac{z}{1-tz}\right)\mathrm{e}^{\psi(t)} = 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur I_z et en évaluant en $t=1$, on obtient

$$\forall z\in \mathrm{D}(0,1) \qquad \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}} = \frac{1}{1-z}$$

La relation vaut trivialement pour $z=0$. Passant à l'inverse, on trouve

$$\forall z\in \mathrm{D}(0,1) \qquad \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}\right) = 1-z$$

d'où

$$\forall z\in \mathrm{D}(1,1) \qquad \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-z)^k}{k}\right) = z$$

Supposons A diagonalisable. Soit $\mathrm{P}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$ avec les λ_i complexes telles que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$. On a $|\lambda_i-1|<1$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$. Par continuité du produit matriciel et d'après la remarque faite à la question précédente, on obtient

$$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{P}\exp(f(\mathrm{D}))\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-\lambda_i)^k}{k}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{P}^{-1}$$

et d'après le résultat précédemment établi, on obtient

$$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}$$

Enfin, on peut vérifier que les matrices diagonalisables forment une partie dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et l'intersection de cet ensemble avec $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n,1)$ constitue donc une partie dense de $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n,1)$. On montre sans difficulté la continuité de f sur $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n,1)$ par convergence normale et donc uniforme sur tout compact de $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n,1)$ de la série de fonctions continues définissant f et on conclut enfin

$$\boxed{\forall \mathrm{A}\in \mathrm{P}_n \qquad \exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}}$$

Exercice 3 (Centrale 2021)

On considère un pion placé initialement en 0 sur l'axe des entiers naturels. Celui-ci ne peut se déplacer que strictement à droite. On note Y_i la variable aléatoire qui mesure le déplacement réalisé à la i-ème étape. La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i\geqslant 1}$ est supposée constituée de variables i.i.d. On note $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i$ pour tout n entier et on pose

$$\forall i\in\mathbb{N}^* \qquad f_i=\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1=i) \quad \text{et} \quad \forall t\in[\,0\,;1\,] \qquad f(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}f_it^i$$

On définit l'événement E_k par « Le pion atteint la case k » et on pose $u_k=\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$ pour k entier. On a $u_0=1$.

1. On suppose que $\mathrm{Y}_1-1\sim\mathscr{B}(p)$ avec $p\in\,]\,0\,;1\,[$.

(a) Écrire une fonction `atteint(k)` d'argument `k` entier qui réalise une simulation du déplacement du pion et renvoie `True` si la case k est atteinte et `False` sinon.

(b) Écrire une fonction `PE(k)` d'argument `k` entier qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.
La comparer à $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$ pour différentes valeurs de k.

(c) Reprendre les questions précédentes avec $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$.

2. Soit k entier. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.
3. Soit k entier et j entier non nul. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$.
En déduire une expression sommatoire de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.
4. Pour t réel, on pose $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.
Montrer que u est défini sur $[\,0\,;1\,[$ puis établir
$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$$
5. En déduire les u_k si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ puis si $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
6. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les k entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que
$$u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$$

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
p=.27

def ber(p):
    return int(rd.rand()<p)

def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=1+ber(p)
    return res==k
```

1.(b) On saisit :

```
def PE(k):
    N=2000
    return np.mean([atteint(k) for i in range(N)])

print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7166
k= 2 P(E_k)= 0.8096
k= 3 P(E_k)= 0.783
k= 4 P(E_k)= 0.7888
...
```

On conjecture $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$

1.(c) On saisit :

```
def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=rd.geometric(p)
    return res==k

...

print("Cas : Y_1 ~ G(p) :")
print('1/E(Y_1)=',p)
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1 ~ G(p) :
1/E(Y_1)= 0.27
k= 1 P(E_k)= 0.265
k= 2 P(E_k)= 0.257
k= 3 P(E_k)= 0.287
...
```

On observe un comportement sensiblement identique à précédemment (on verra que c'est même plus tranché en fait).

2. Soit k entier. Pour $n < m$, on a

$$\{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{S}_m = k\} \subset \left\{\sum_{i=n+1}^{m} \mathrm{Y}_i = 0\right\} = \varnothing$$

L'événement E_k est réalisé si et seulement s'il existe n entier tel que $\mathrm{S}_n = k$ et un tel n s'il existe est unique. On conclut

$$\boxed{\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}}$$

Remarque : Si k est entier non nul, on peut écrire $\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}$ puisque $\mathrm{S}_0 = 0$ ce qui implique $\{\mathrm{S}_0 = k\} = \varnothing$.

3. Soit k et j entiers non nuls. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Si $j \geqslant k+1$, on a pour $n \geqslant 1$

$$\{\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j\} \cap \{\mathrm{Y}_1 \leqslant k, \mathrm{Y}_1 = j\} = \varnothing$$

d'où $$\forall j \geqslant k+1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = 0$$

Si $j \leqslant k$, il vient $$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k - j, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Les variables $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ et Y_1 sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k - j)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)$$

La variable $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ a même loi que S_{n-1} et par suite

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = k - j) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_{n-1} = k - j\}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall (k,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j}) \text{ si } j \leqslant k \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}}$$

Par probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j})}$$

4. On a $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ pour tout k entier. Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k t^k$ est donc $\geqslant 1$ ce qui prouve que la fonction u est définie sur $[\,0\,;1\,[$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$u(t) = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j\right) t^k$$

Si on pose $f_0 = 0$ par commodité, on a

$$u(t) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} u_{k-j} f_j\right) t^k$$

La fonction f est la fonction génératrice de Y_1 donc le rayon de convergence de sa série entière est $\geqslant 1$. Ainsi, par produit de Cauchy de séries entières, on obtient

$$u(t) = 1 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} f_j t^j\right) = 1 + u(t)f(t)$$

Puis, la fonction f est croissante comme somme (infinie) de telles fonctions et $f(t) \leqslant f(1) = 1$ avec

$$\begin{aligned} f(t) = f(1) \iff \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{f_j(1-t^j)}_{\geqslant 0} = 0 &\iff \forall j \in \mathbb{N} \qquad f_j(1-t^j) = 0 \\ &\iff \exists j \in \mathbb{N}^* \qquad 1 - t^j = 1 \iff t = 1 \end{aligned}$$

puisque les f_j sont non tous nuls. On conclut

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}}$$

5. Si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$, on a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad f(t) = (1-p)t + pt^2$$

d'où $\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1-(1-p)t-pt^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+pt)} = \dfrac{1}{1+p}\left[\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{p}{1+pt}\right]$

Ainsi $\quad \forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1+p}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k + p\sum_{k=0}^{+\infty}(-pt)^k\right] = \dfrac{1}{1+p}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 + (-1)^k p^{k+1}\right) t^k$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{B}(p), \text{ alors } u_k = \frac{1}{1+p}\left(1 + (-1)^k p^{k+1}\right) \text{ pour tout } k \text{ entier.}}$$

On peut compléter la simulation faite précédemment :

```
print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k),'P(E_k)_th=',(1+(-1)**k*p**(k+1))/(1+p))
```

et on observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7326 P(E_k)_th= 0.73
k= 2 P(E_k)= 0.7998 P(E_k)_th= 0.8029
k= 3 P(E_k)= 0.779 P(E_k)_th= 0.7832169999999999
...
```

On suppose $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} t^j = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

puis

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \dfrac{pt}{1-(1-p)t}} = \frac{1-(1-p)t}{1-t} = (1-(1-p)t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = 1 + p\sum_{k=1}^{+\infty} t^k$$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p), \text{ alors } u_k = p \text{ pour tout } k \text{ entier non nul.}}$$

6. On note $\operatorname{supp} \mathrm{Y}_1 = \{f_{k_1}, \ldots, f_{k_n}\}$ avec les k_j premiers entre eux dans leur ensemble. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} t^{k_j}}$$

On sait que $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$ donc 1 est un pôle de la fraction rationnelle définissant u. Soit α un pôle complexe de cette fraction rationnelle avec $|\alpha| \leqslant 1$. On a $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} = 1$ d'où

$$1 = \left| \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$$

ce qui prouve que l'inégalité triangulaire est une égalité et par conséquent $\alpha^{k_j} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel pour tout $j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. Par suite

$$1 = \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$$

d'où $\alpha^{k_j} = 1$ pour tout $j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. Or, par relation de Bezout, on dispose de u_j entiers relatifs tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j k_j = 1$. Il vient

$$\alpha = \alpha^{\sum_{j=1}^{n} u_j k_j} = 1$$

Ainsi, l'unique pôle de module $\leqslant 1$ est égal à 1 et tous les autres sont donc de module > 1. Soit α un pôle de module > 1. Sa contribution dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-f}$ est de la forme

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} + \frac{\lambda_2}{(\alpha - t)^2} + \ldots$$

et

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} = \frac{\lambda_1}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^k$$

le terme de degré k est donc proportionnel à $\dfrac{1}{\alpha^k}$ qui est de limite nulle et de même pour les autres termes. Enfin, on trouve

$$\frac{1}{1 - f(t)} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \frac{1}{1-t} + \ldots = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k + \ldots$$

et d'après ce qui précède, on conclut

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$