ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral python - Feuille n°3

Exercice 1 (Centrale 2021)

Pour x réel, on pose sous réserve de convergence

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'équation différentielle sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G.
2. Tracer la courbe de F.
3. Tracer la courbe de G en expliquant pourquoi la méthode naïve ne convient pas. Faire une conjecture concernant F et G.
4. Soit ϕ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et $x_0 \in \mathrm{I}$. À l'aide du développement limité de ϕ, exprimer $\phi''(x_0)$ comme limite d'une expression faisant intervenir $\phi(x_0+h)$ et $\phi(x_0-h)$.
5. En admettant que F soit de classe $\mathscr{C}^2$, vérifier numériquement qu'elle satisfait l'équation (E).
6. Montrer que F et G sont continues sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
7. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
8. Montrer que F et G sont solutions de (E) puis que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.
9. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_n l'ensemble des matrices de E n'ayant pas de valeur propre réelle négative. On pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad f(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\int_0^1 \left(t(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n\right)^{-1}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur P_n.
2. Écrire une fonction `exp(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une somme partielle de 100 termes de l'exponentielle de matrice.
3. Écrire une fonction `f(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une approximation de $f(\mathrm{A})$ par la méthode des rectangles.
4. Pour une matrice `A` aléatoire de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, afficher `A`, `f(exp(A))` et `exp(f(A))`. Que peut-on conjecturer ?
5. Montrer que l'application définie sur E par $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sous-multiplicative.
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$.
   (b) Écrire $f(\mathrm{A})$ comme la somme d'une série.
   (c) Établir
   $$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$$

Exercice 3 (Centrale 2021)

On considère un pion placé initialement en 0 sur l'axe des entiers naturels. Celui-ci ne peut se déplacer que strictement à droite. On note Y_i la variable aléatoire qui mesure le déplacement réalisé à la i-ème étape. La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i \geqslant 1}$ est supposée constituée de variables i.i.d. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ pour tout n entier et on pose

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad f_i = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = i) \quad \text{et} \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$$

On définit l'événement E_k par « Le pion atteint la case k » et on pose $u_k = \mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$ pour k entier. On a $u_0 = 1$.

1. On suppose que $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Écrire une fonction `atteint(k)` d'argument `k` entier qui réalise une simulation du déplacement du pion et renvoie `True` si la case k est atteinte et `False` sinon.
   (b) Écrire une fonction `PE(k)` d'argument `k` entier qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$. La comparer à $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$ pour différentes valeurs de k.
   (c) Reprendre les questions précédentes avec $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$.
2. Soit k entier. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.
3. Soit k entier et j entier non nul. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$.
   En déduire une expression sommatoire de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.
4. Pour t réel, on pose $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.
   Montrer que u est défini sur $[\,0\,;1\,[$ puis établir
   $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - f(t)}$$
5. En déduire les u_k si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ puis si $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
6. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les k entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que
   $$u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$$