Exercice 1 (Centrale 2021)

1. Rappeler et démontrer le théorème de limite monotone.
2. On pose $a_0 \in]\,0\,;\pi\,[$ et $a_{n+1} = \sin a_n$ pour n entier. Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $(u_n)_n$ suite réelle qu'on suppose décroissante. Si $(u_n)_n$ est minorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et sinon $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Supposons $(u_n)_n$ non minorée. Pour m réel, on dispose d'un seuil N entier tel que $u_n \leqslant m$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, autrement dit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Supposons $(u_n)_n$ minorée. La borne inférieure est donc finie. Par caractérisation de cette borne inférieure, pour $\varepsilon > 0$, on dispose d'un seuil N entier tel que

$$\operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k \leqslant u_{\mathrm{N}} < \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k + \varepsilon$$

Par décroissance de $(u_n)_n$, il s'ensuit

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k \leqslant u_n \leqslant u_{\mathrm{N}} < \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k + \varepsilon$$

ce qui prouve
$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} u_k$$

2. Par récurrence immédiate, on établit $a_n \in]\,0\,;\pi\,]$ pour tout n entier. Après étude de fonction, on obtient

$$\forall x \in]\,0\,;\pi\,] \qquad \sin(x) < x$$

et on en déduit la décroissance de $(a_n)_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_n$ est décroissante minorée donc convergente. On a $a_{n+1} = \sin a_n$ avec la fonction sin continue sur l'intervalle fermé $[\,0\,;\pi\,]$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ est point fixe de sin sur $[\,0\,;\pi\,]$. Or, on a

$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \sin x = x \iff x = 0$$

Ainsi
$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

La série téléscopique $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \sum\left[\ln a_{n+1} - \ln a_n\right]$ converge si et seulement si la suite $(\ln a_n)_n$ admet une limite finie. On a $\ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ et on en déduit la divergence de $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Par ailleurs, comme $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il vient

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2)\right) = -\frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a_n^2}{6} < 0$$

D'après le critère des équivalentes (licite, signe constant), les séries $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et $\sum a_n^2$ sont de même nature et d'où la divergence de $\sum a_n^2$. Enfin, on a $a_n \in]\,0\,;1\,]$ pour tout n entier non nul d'où

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n^2 \leqslant a_n$$

Par comparaison, on conclut
$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum a_n \text{ diverge.}}$$

Comme la suite $(a_n)_n$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées et converge donc. Ainsi, la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence noté R converge pour $x = -1$ d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$ et diverge pour $x = -1$ d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$. On conclut

$$\boxed{\text{La série entière } \sum a_n x^n \text{ a un rayon de convergence égal à 1.}}$$

3. Un développement limité donne

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \sin a_n = a_n - \frac{a_n^3}{6} + \mathrm{o}(a_n^3)$$

On cherche α réel tel que la suite $\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right)_n$ admette une limite finie non nulle. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= \left(a_n - \frac{a_n^3}{6} + \mathrm{o}(a_n^3)\right)^\alpha - a_n^\alpha \\
&= a_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \\
a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= a_n^\alpha \left(1 - \alpha\frac{a_n^2}{6} + \mathrm{o}(a_n^2) - 1\right) = a_n^{\alpha+2}\left(-\frac{\alpha}{6} + \mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha = -2$ et il vient $\qquad a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3}$

D'après le théorème de Césaro, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right] = \frac{1}{n}\left(a_n^{-2} - a_0^{-2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

et comme $\qquad a_n^{-2} - a_0^{-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^{-2}$

On conclut $\qquad \boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$

Exercice 2 (Centrale 2016)

Soit n entier non nul et

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

et χ_n son polynôme caractéristique.

1. Écrire un fonction `A(n)` d'argument n entier non nul et qui renvoie A_n.
2. Pour n entier avec $n \geqslant 2$, relier χ_n et χ_{n-1}.
3. On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{F}_n = \frac{\chi_n}{\prod_{k=2}^{n} (\mathrm{X} - k)}$$
   Calculer la décomposition en éléments simples F_n et en déduire une expression non factorisée de χ_n.
4. Justifier que pour n entier non nul, on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) \subset \mathbb{R}$.
5. Écrire une fonction `L(n)` d'argument n entier non nul et qui renvoie $\lambda_n = \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n)$.
6. Représenter les termes de la suite $(\lambda_n)_{n \in [\![2\,;10]\!]}$.
7. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$ et le vérifier par simulation.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        res[i,0]=1
        res[0,i]=1
        res[i,i]=i+1
    return res
```

2. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. En développant sur la dernière colonne, on obtient

$$\chi_n = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X}-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathrm{X}-n+1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (\mathrm{X}-n)\chi_{n-1}$$

En développant le déterminant d'ordre $n-1$ sur la dernière ligne, il vient

$$\boxed{\chi_n = -\prod_{k=2}^{n-1} (\mathrm{X}-k) + (\mathrm{X}-n)\chi_{n-1}}$$

3. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On a

$$\mathrm{F}_n = \frac{\chi_n}{\prod_{k=2}^{n}(\mathrm{X}-k)} = -\frac{1}{\mathrm{X}-n} + \frac{\chi_{n-1}}{\prod_{k=2}^{n-1}(\mathrm{X}-k)} = -\frac{1}{\mathrm{X}-n} + \mathrm{F}_{n-1}$$

En fixant $\mathrm{F}_1 = \chi_1 = \mathrm{X}-1$, on obtient par récurrence immédiate

$$\boxed{\mathrm{F}_n = \mathrm{X} - 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\mathrm{X}-k} \quad \text{et} \quad \chi_n = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-k) + \sum_{k=2}^{n} \prod_{i\in[\![2\,;\,n]\!]\smallsetminus\{k\}} (\mathrm{X}-i)}$$

Remarque : On peut court-circuiter les questions du sujet et déterminer directement χ_n. Pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$, on a

$$\chi_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & x-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x-n \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\mathrm{L}_i}{x-i}$, il vient

$$\chi_n(x) = \begin{vmatrix} x-1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x-i} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x-n \end{vmatrix} = \left(x-1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x-i}\right)\prod_{i=2}^{n}(x-i)$$

En distribuant le produit, on obtient une égalité entre deux expressions polynomiales pour une infinité de valeurs. Le résultat suit.

4. Pour n entier non nul, la matrice A_n est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) \subset \mathbb{R}}$$

5. On saisit :

```
def L(n):
    return max(alg.eigvals(A(n)))
```

6. On saisit :

```
tn=range(2,11)
tL=[L(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tL,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

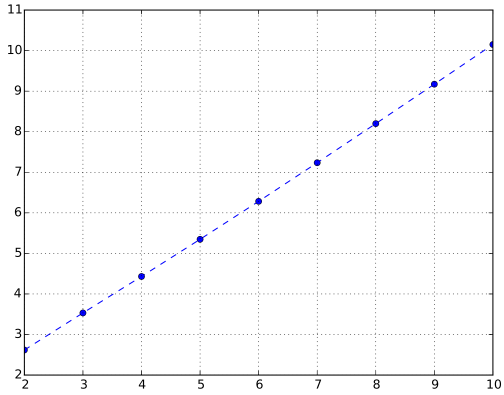

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(\lambda_n)_n$

On conjecture $$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

7. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2\}\, n \qquad f_n(x) = x - 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x-k}$$

La fonction f_n est croissante comme somme de telles fonctions. Pour tout $k \in [\![2\,;\, n]\!]$, on a

$$f_n(x) \xrightarrow[x\to k^-]{} +\infty \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[x\to k^+]{} -\infty$$

et aussi $$f_n(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{}$$

On en déduit que f_n s'annule sur $]-\infty\,;2\,[$, $]\,2\,;3\,[$, ..., $]\,n-1\,;n\,[$ et $]\,n\,;+\infty\,[$ d'où n racines distinctes pour f_n et comme on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2\}\, n \qquad f_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{\prod\limits_{k=2}^{n}(x-k)}$$

on en déduit qu'il s'agit exactement des racines du polynôme χ_n qui est de degré n. Par ailleurs, on a

$$\chi_n(n+1) = n+1-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n+1-k} = n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \geqslant n - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-(n-1) = 1 > 0$$

On en déduit $$\lambda_n \in \,]\,n\,;n+1\,[$$

On conclut $$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

Remarque : On peut sans trop d'effort améliorer ce résultat en établissant un développement asymptotique à deux termes. On a

$$\chi_n(\lambda_n) = 0 \iff \lambda_n - 1 = \frac{1}{\lambda_n - n} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n - k}$$

Puis
$$\begin{aligned} n < \lambda_n < n+1 &\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{n+1-k} < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n-k} < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{n-k} \\ &\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \end{aligned}$$

On en déduit $$\lambda_n - 1 = \frac{1}{\lambda_n - n} + \mathrm{o}(\lambda_n)$$

d'où $$\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n - n}$$

Par suite $$\lambda_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n}$$

Et on conclut $$\boxed{\lambda_n = n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On saisit :

```
tn=range(2,100)
tD=[n*(L(n)-n) for n in tn]
plt.plot(tn,tD,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

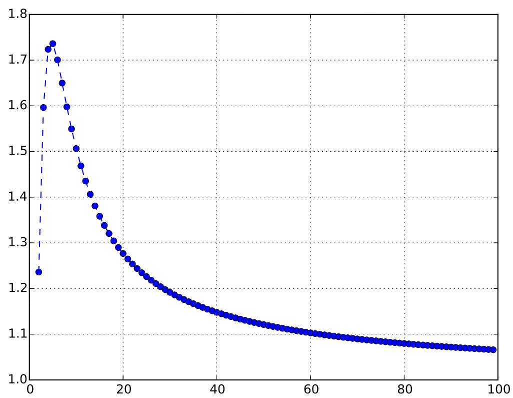

FIGURE 2 – Tracé de la suite $(n(\lambda_n - n))_n$

Exercice 3 (Centrale 2016)

Pour n entier non nul, on pose

$$\forall x > 0 \qquad f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Écrire une fonction `x(n)` d'argument n entier et qui renvoie x_n.
3. Représenter les termes de la suite $(x_n)_{n \in [\![1\,;20]\!]}$. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$?
4. Prouver que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \to +\infty$.
6. Poursuivre ce développement.

Corrigé : 1. On a $f_n(1) = 1 - n \neq 0$ pour $n \geqslant 2$. On suppose $n > 2$ pour la suite. Pour $x > 0$ avec $x \neq 1$, on trouve

$$f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$$

On pose $$\forall x > 0 \qquad g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

La fonction g_n est dérivable avec $g_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x - 2n\right)$. On en déduit que g_n est décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, sur $\left]\,1\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$. Comme $g_n(1) = 1$, la fonction g_n ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$ et $\left]\,0\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ mais comme $g_n\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < g_n(1) = 0$, on a un unique point d'annulation de g_n sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$ qui est donc également l'unique point d'annulation de f_n. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe un unique } x_n > 0 \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

2. On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:x**n-sum([x**k for k in range(n)]),2)[0]
```

On initialise la descente à 2 pour être au-delà de l'extremum atteint en $\dfrac{2n}{n+1}$.

3. On saisit :

```
tn=range(2,15)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

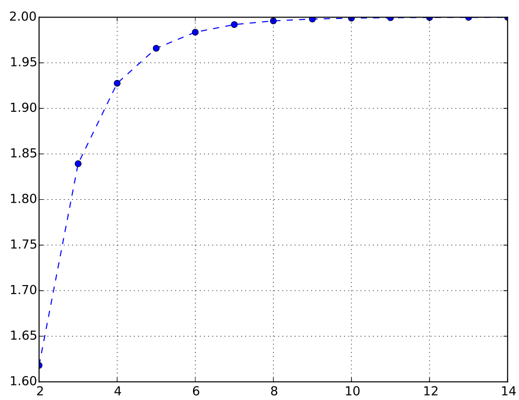

Figure 3 – Tracé de la suite $(x_n)_n$

On conjecture $$\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2}$$

4. Soit $n \geqslant 2$. On a $\quad g_n(2) = 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1 = 1 > 0 = g_n(x_n)$

Ainsi, par croissance de stricte de g_n, il vient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{2n}{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$$

Par encadrement $$\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2}$$

5. On a

$$f_n(x_n) = 0 \iff x_n - \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} = 0 \iff x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0 \iff x_n^n(2 - x_n) = 1$$

Avec $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$, on obtient $x_n \geqslant \dfrac{3}{2}$ pour n assez grand. Puis

$$\frac{n}{x_n^n} < n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \mathrm{o}(1) \quad \Longrightarrow \quad x_n^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ensuite
$$\begin{aligned} 2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left[-n\ln\left(2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \ln\left(1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right] \\ 2 - x_n &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left(-n\ln 2 + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)}$$

6. On réinjecte le développement obtenu dans la relation vérifiée par x_n :

$$\begin{aligned} 2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left[-n\ln\left(2 - \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right)\right] \\ 2 - x_n &= \exp\left[-n\left(\ln 2 - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right] = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)}$$

Remarque : On peut évidemment itérer ce procédé.

Exercice 4 (Mines 2021)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et p, q, r des projecteurs de E. On suppose que $p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer $q=r=0$.

Corrigé : En considérant une base adaptée à p, on trouve $\mathrm{Tr}\ p = \mathrm{rg}\ p$ et de même pour q et r. On note $a=\mathrm{rg}\ p$, $b=\mathrm{rg}\ q$, $c=\mathrm{rg}\ r$ et $d=\mathrm{rg}\,(p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r)$. Passant à la trace, il vient

$$d = \mathrm{Tr}\,(p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r) = \mathrm{Tr}\ p + \sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\ q + \sqrt{3}\,\mathrm{Tr}\ r = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$$

d'où
$$d-a = b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$$

Supposons $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$. On trouve $2p^2=q^2$ d'où $1+2v_2(p)=2v_2(q)$ ce qui est absurde et prouve donc l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de même pour $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$. On a

$$(d-a)^2 = 2b^2+3c^2+2bc\sqrt{6}$$

On en déduit $bc=0$. Si $b=0$, on trouve

$$d = a + c\sqrt{3}$$

d'où $c=0$ et de même, si $c=0$, on trouve

$$d = a + b\sqrt{2}$$

d'où $b=0$. Dans tous les cas, on a $b=c=0$, autrement dit

$$\boxed{q=r=0}$$

Exercice 5 (Mines 2022)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et p, q des projecteurs sur E tels que $\|p-q\|_{\mathrm{op}} < 1$. Montrer

$$\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} q$$

Corrigé : Supposons $\operatorname{rg} p > \operatorname{rg} q$. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q = \operatorname{rg} p + \dim \operatorname{Ker} q - \dim(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$$

et d'après le théorème du rang, il vient

$$\dim \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q = \underbrace{\operatorname{rg} p - \operatorname{rg} q}_{>0} + \underbrace{n - \dim(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)}_{\geqslant 0} > 0$$

Par conséquent, on peut choisir $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a $(p-q)(x) = p(x) = x$ puis

$$\|x\| = \|(p-q)(x)\| \leqslant \|p-q\|_{\mathrm{op}} \|x\|$$

d'où
$$1 \leqslant \|p-q\|_{\mathrm{op}}$$

ce qui contredit l'hypothèse d'où $\operatorname{rg} p \leqslant \operatorname{rg} q$. Par symétrie des rôles, on a également $\operatorname{rg} q \leqslant \operatorname{rg} p$ et on conclut

$$\boxed{\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} q}$$

Exercice 6 (Centrale 2019)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$. On note

$$(*) : \quad \varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$(**) : \quad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{rg}\ \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}\ \mathrm{M}$$

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer
$$\mathrm{M} \text{ nilpotente} \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que φ vérifie $(*)$. Montrer
$$\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
3. Établir $\qquad (*) \Longrightarrow (**)$

Corrigé : 1. On a

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \lambda^{-1}\mathrm{I}_n - \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\\
&\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \chi_{\mathrm{M}}(\lambda^{-1}) \neq 0\\
\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \{0\}
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{M} \text{ nilpotente} \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad (\mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

2. Soit $\mathrm{M} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $r = \mathrm{rg}\ \mathrm{M}$. On note $\mathrm{K}_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. On a $\mathrm{rg}\ \mathrm{K}_r = r$ et comme des matrices de même rang sont équivalentes, on dispose de A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{AK}_r\mathrm{B}$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$. On a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{K}_r\mathrm{B}$ semblable à K_r donc nilpotente d'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Multipliant par la matrice inversible P à gauche, on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{P} - \lambda \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Ainsi, on a $\varphi(\mathrm{P} - \lambda \mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{P}) - \lambda\varphi(\mathrm{M})$ inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\varphi(\mathrm{P})$ inversible d'où, multipliant à gauche par $\varphi(\mathrm{P})^{-1}$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\varphi(\mathrm{P})^{-1}\varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

ce qui prouve $\varphi(\mathrm{P})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ nilpotente donc non inversible. Il en résulte que $\varphi(\mathrm{M})$ n'est pas inversible et on conclut

$$\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = r < n$. On dispose de A, B inversibles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{AJ}_r\mathrm{B}$. On pose $\mathrm{Q} = \mathrm{ADB}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. On a $\mathrm{Q} - \lambda\mathrm{M} = \mathrm{A}(\mathrm{D} - \lambda\mathrm{J}_r)\mathrm{B}$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$ d'où $\varphi(\mathrm{Q}) - \lambda\varphi(\mathrm{M})$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$, autrement dit $\lambda^{-1}\mathrm{I}_n - \varphi(\mathrm{Q})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$ ce qui prouve que $\varphi(\mathrm{Q})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ admet r valeurs propres distinctes non nulles d'où $\mathrm{rg}\ \varphi(\mathrm{M}) \geqslant r$. L'inégalité vaut aussi si $r = n$ et on a donc établi

$$\boxed{\mathrm{rg}\ \varphi(\mathrm{M}) \geqslant \mathrm{rg}\ \mathrm{M}}$$

Ainsi, l'endomorphisme φ est donc injectif et est par conséquent un automorphisme. Il s'ensuit que l'équivalence établie à la deuxième question vaut aussi pour φ^{-1} et l'inégalité précédente appliquée à φ^{-1} permet de conclure

$$\boxed{(*) \Longrightarrow (**)}$$

Exercice 7 (Centrale 2017)

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{E}_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant n^2\} \quad$ et $\quad u_n = \dfrac{4\,\mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n}{(2n+1)^2}$

1. Tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_n$. Faire une conjecture sur sa limite.
2. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n = 1 + 4n + 4\,\mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n^{++}$

   avec $\mathrm{E}_n^{++} = \big\{(x,y) \in \mathbb{N}^{*2} \mid x^2+y^2 \leqslant n^2\big\}$.
3. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n^{++} = \displaystyle\sum_{x=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor$
4. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2-x^2} - n + 1 \leqslant \mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n^{++} \leqslant \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2-x^2}$

   On pose à présent $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2-x^2}$
5. Tracer les 50 premiers termes de la suite $(v_n)_n$.
6. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.
7. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i \geqslant 1}$, $(\mathrm{Y}_i)_{i \geqslant 1}$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![-n\,;\, n]\!]$. On note $\mathrm{Z}_k = \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}((\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k))$ pour k entier non nul et $\mathrm{S}_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Z}_k$ pour p entier non nul.
8. Quelle est la loi de S_p avec p entier non nul ?
9. Retrouver par simulation le résultat obtenu sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def u(n):
    res=0
    for x in range(-n,n+1):
        for y in range(-n,n+1):
            if x**2+y**2<=n**2:
                res+=1
    return 4*res/(2*n+1)**2

tn=range(1,51)
tu=[u(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tu)
plt.grid();plt.show()
```

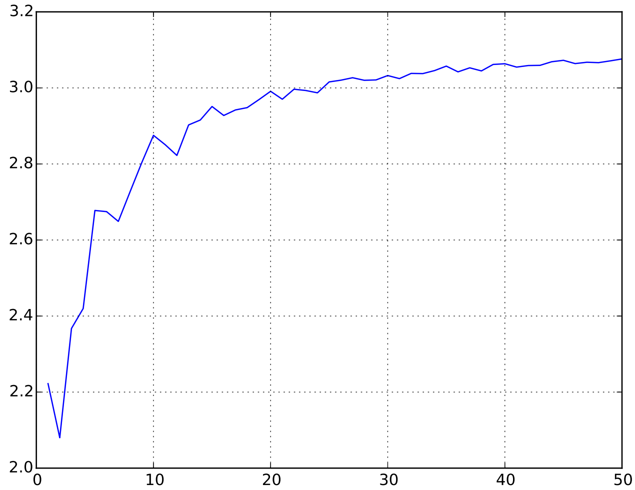

FIGURE 4 – Tracé de la suite $(u_n)_n$

On conjecture
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi}$$

2. Il suffit de compter séparément l'origine $(0,0)$, les points de E_n sur les axes et chaque quart compris strictement entre axes des abscisses et des ordonnées pour obtenir
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n = 1 + 4n + 4 \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++}}$$

3. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}_n^{++}$. Pour x fixé dans $[\![1\,;\, n]\!]$, on a $y^2 \leqslant n^2 - x^2$ d'où $y \leqslant \sqrt{n^2 - x^2}$ et y est un entier d'où $y \in [\![1\,;\, \lfloor \sqrt{n^2-x^2} \rfloor]\!]$. Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} = \sum_{x=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor}$$

4. On a
$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad u - 1 \leqslant \lfloor u \rfloor \leqslant u$$

La majoration attendue est immédiate et pour la minoration, il suffit d'observer que $\operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} = \sum_{x=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor$ puis sommer. On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2} - n + 1 \leqslant \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} \leqslant \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2 - x^2}}$$

5. On saisit :

```
def v(n):
    return sum([np.sqrt(n**2-x**2) for x in range(1,n+1)])/n**2

tv=[v(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tv)
plt.grid();plt.show()
```

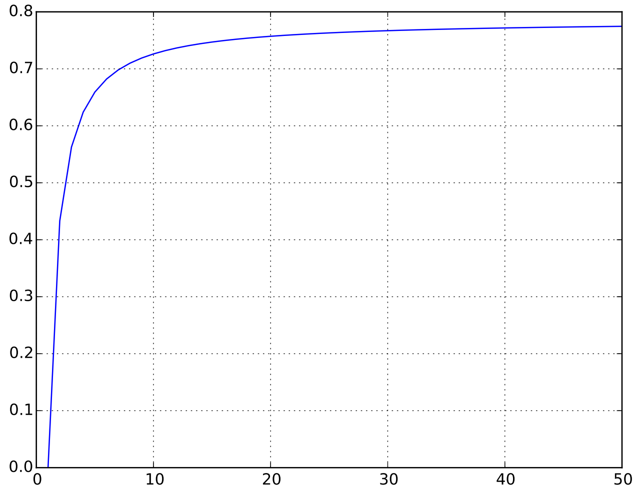

FIGURE 5 – Tracé de la suite $(u_n)_n$

On conjecture $$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}}$$

6. Pour n entier non nul, on a
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$
On reconnaît une somme de Riemann avec la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u^2}$ et par conséquent
$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}}$$

7. Avec le résultat de la question 4, on a
$$\frac{\mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n^{++}}{n^2} = v_n + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$$
Et donc $$\boxed{u_n = \frac{4(1+4n+n^2\pi+\mathrm{o}(n^2))}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi}$$

8. Soit k entier non nul. On a $\mathrm{Z}_k \sim \mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n = \dfrac{\mathrm{Card}\ \mathrm{E}_n}{\mathrm{Card}\,[\![-n\,;\,n]\!]^2}$ d'où
$$\boxed{\mathrm{S}_p \sim \mathscr{B}(p, u_n/4)}$$

9. On saisit :

```
tMC=[]
N=5000
for n in tn:
    tX=rd.randint(-n,n+1,N)
    tY=rd.randint(-n,n+1,N)
    res=0
    for k in range(N):
        if tX[k]**2+tY[k]**2<=n**2:
```

```
            res+=1
    tMC.append(res/N*4)

plt.plot(tn,tMC)
plt.grid();plt.show()
```

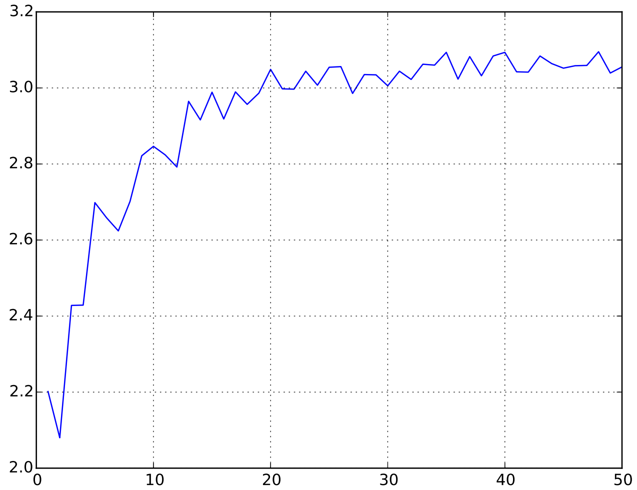

FIGURE 6 – Approximation par Monte-Carlo

Il s'agit d'une méthode de Monte-Carlo avec l'approximation motivée par la loi faible des grands nombres

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} 4\mathrm{Z}_k \simeq 4\mathbb{E}(\mathrm{Z}_1) = u_n}$$

Exercice 8 (Centrale 2022)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau.

1. Montrer que $f_{\mathrm{A}} : \mathbb{Z} \to \mathrm{A}, k \mapsto k1_{\mathrm{A}}$ est le seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A. Montrer qu'il existe $k_{\mathrm{A}} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{A}}\mathbb{Z}$.
2. On suppose que A est un corps. Montrer que $k_{\mathrm{A}} = 0$ ou que k_{A} est premier. Étudier la réciproque.
   On suppose que A est un corps fini et on admet que $|\mathrm{A}| = p^n$ avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}, x \mapsto x^p$. Montrer que φ est un automorphisme de A. Déterminer l'ordre de φ dans $(\mathrm{Aut}(\mathrm{A}), \circ)$.

Corrigé : 1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathrm{A}$ un morphisme d'anneaux. On a $f(1) = 1_{\mathrm{A}}$ puis $f(k) = kf(1) = k1_{\mathrm{A}}$ (résultat de cours qu'on redémontre au besoin avec une récurrence pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $-k \in \mathbb{N}$). Ainsi, on a $f = f_{\mathrm{A}}$ et on vérifie sans difficulté qu'il s'agit bien d'un morphisme d'anneaux. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f_{\mathrm{A}} \text{ est l'unique morphisme d'anneaux de } \mathbb{Z} \text{ dans A.}}$$

En particulier, le morphisme d'anneaux f_{A} est un morphisme de groupes additifs. Par conséquent, les notions de noyaux de morphismes d'anneaux et de groupes coïncidant, le noyau $\mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{A}}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } k_{\mathrm{A}} \text{ entier tel que } \mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{A}}\mathbb{Z}}$$

Remarque : L'entier k_{A} est appelé *caractéristique de l'anneau* A.

2. Supposons $k_{\mathrm{A}} \notin \{0\} \cup \mathcal{P}$. Si $k_{\mathrm{A}} = 1$, alors $1_{\mathrm{A}} = 0_{\mathrm{A}}$ et l'anneau A serait nul, ce qui est absurde. Sinon, on dispose alors de a et b entiers non nuls diviseurs stricts de $ab = k_{\mathrm{A}}$ et qui ne sont donc pas dans $\mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{A}}\mathbb{Z}$. Par suite

$$f_{\mathrm{A}}(a)f_{\mathrm{A}}(b) = f_{\mathrm{A}}(ab) = f_{\mathrm{A}}(k_{\mathrm{A}}) = 0_{\mathrm{A}} \quad \text{avec} \quad f_{\mathrm{A}}(a) \neq 0_{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad f_{\mathrm{A}}(b) \neq 0_{\mathrm{A}}$$

ce qui contredit l'intégrité du corps A. On conclut

$$\boxed{\text{Si A est un corps, alors } k_{\mathrm{A}} \in \{0\} \cup \mathcal{P}.}$$

Avec $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$, on a $k_{\mathrm{A}} = 0$ mais l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. Avec $\mathrm{A} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, on a $k_{\mathrm{A}} = 2$ mais l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$ n'est pas intègre en observant par exemple

$$(\bar{1}, \bar{0}) \times (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

On conclut $\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

3. En considérant f_{A} comme morphisme de groupes, on a $\mathrm{Im}\ f_{\mathrm{A}} = \langle 1_{\mathrm{A}} \rangle$. Si $k_{\mathrm{A}} = 0$, alors on a $\langle 1_{\mathrm{A}} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ qui est donc infini ce qui absurde. On en déduit $k_{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}$ et $\langle 1_{\mathrm{A}} \rangle \simeq \mathbb{Z}/k_{\mathrm{A}}\mathbb{Z}$. L'ordre de 1_{A} dans le groupe $(\mathrm{A}, +)$ divise l'ordre de ce groupe, autrement dit k_{A} divise p^n d'où $k_{\mathrm{A}} \in \{1, p\}$ et par conséquent $k_{\mathrm{A}} = p$. Soit $(x, y) \in \mathrm{A}^2$. Le corps A étant commutatif conformément aux consignes du programme de CPGE, il vient

$$\varphi(x + y) = (x + y)^p = x^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} + y^p$$

La formule des chefs assure que

$$\forall k \in [\![1\,; p-1]\!] \qquad k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$

et comme $k \wedge p = 1$ pour $k \in [\![1\,; p-1]\!]$, le lemme de Gauss assure que p divise $\binom{p}{k}$ d'où $\binom{p}{k} \in \mathrm{Ker}\ f_{\mathrm{A}}$ pour tout $k \in [\![1\,; p-1]\!]$. Par conséquent

$$\varphi(x+y) = x^p + y^p = \varphi(x) + \varphi(y)$$

et on a clairement $\varphi(1) = 1_{\mathrm{A}}$ et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ \varphi$, c'est-à-dire $x^p = 0$. Par intégrité de A, il vient $x = 0_{\mathrm{A}}$ ou $x^{p-1} = 0_{\mathrm{A}}$ et une récurrence donne alors $x = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi, l'application φ est injectif de A dans lui-même avec A ensemble fini d'où la bijectivité de φ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un automorphisme de A.}}$$

On observe $$\forall x \in \mathrm{A} \qquad \varphi^2(x) = \varphi(x^p) = x^{p^2}$$

d'où par récurrence $$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{A} \qquad \varphi^k(x) = x^{p^k}$$

Comme l'anneau A est un corps, on a $\mathrm{U(A)} = \mathrm{A} \smallsetminus \{0_{\mathrm{A}}\}$ et par conséquent $\mathrm{Card\ U(A)} = p^n - 1$. Dans le groupe multiplicatif $(\mathrm{U(A)}, \times)$, l'ordre d'un élément divisant l'ordre du groupe, on a $x^{p^n-1} = 1_{\mathrm{A}}$ pour $x \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0_{\mathrm{A}}\}$ d'où $x^{p^n} = x$ et cette égalité vaut aussi pour $x = 0_{\mathrm{A}}$. On a donc établi $\varphi^n = \mathrm{id}$. Supposons que l'ordre de φ soit $r < n$. On aurait alors

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad \varphi^r(x) = x^{p^r} = x$$

Par conséquent, tout élément de A serait racine du polynôme $\mathrm{X}^{p^r} - \mathrm{X}$ de degré $p^r < p^n$. Or, un polynôme n'admet pas plus de racines distinctes que son degré ce qui contredit l'inégalité précédente. Il s'ensuit $\varphi^r \neq \mathrm{id}$ pour tout $r < n$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ordre de } \varphi \text{ est égal à } n.}$$

Exercice 9 (Centrale 2022)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t}$ pour $f \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } t \leqslant s \\ (1-t)s & \text{sinon} \end{cases}$$

et
$$\forall (f,s) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

2. Établir
$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{T}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{10}}\|f\|_2$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Corrigé : 1. On remarque

$$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = (1 - \max(s,t))\min(s,t)$$

avec
$$\max(s,t) = \frac{s+t+|s-t|}{2} \qquad \min(s,t) = \frac{s+t-|s-t|}{2}$$

On en déduit la continuité de K sur $[\,0\,;1\,]^2$ comme composée de telles fonctions. Soit $f \in \mathrm{E}$. On vérifie :

- Pour $s \in [\,0\,;1\,]$, on a $t \mapsto \mathrm{K}(s,t)f(t) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ (et même continue en fait).
- Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $s \mapsto \mathrm{K}(s,t)f(t) \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.
- Domination : On a $\quad \forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad |\mathrm{K}(s,t)f(t)| \leqslant |f(t)|$

dominante intégrable sur $[\,0\,;1\,]$ car continue sur ce segment. On en déduit $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ et par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $(f,s) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathrm{T}(f)(s)^2 = \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Puis
$$\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

Soit $s \in [\,0\,;1\,]$. Par relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^s (1-s)^2 t^2\,\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)^2 s^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left((1-s)^2 s^3 + (1-s)^3 s^2\right) = \frac{1}{3}(1-s)^2 s^2 = \frac{1}{3}(s^2 - 2s^3 + s^4) \end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{90}$$

On conclut
$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{T}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{3\sqrt{10}}\|f\|_2}$$

Remarque : L'énoncé d'origine demandait une majoration en $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, vraiment très grossière...

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Par relation de Chasles, il vient

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \begin{aligned} \mathrm{T}(f)(s) &= \int_0^s (1-s)tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)sf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (1-s)\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental d'analyse, les fonctions $s \mapsto \displaystyle\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $s \mapsto \displaystyle\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$, primitives respectives de $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto -(1-t)f(t)$. On en déduit que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$ et par dérivation, il vient

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \begin{aligned} \mathrm{T}(f)'(s) &= -\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + (1-s)sf(s) + \int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t - s(1-s)f(s) \\ &= \int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit $\mathrm{T}(f)' \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et par dérivation

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)''(s) = -f(s)$$

Soit λ réel et $f \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Si $\lambda = 0$, alors $f = 0_{\mathrm{E}}$. On suppose $\lambda \neq 0$. Il découle de l'égalité $f = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)$ que $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et par dérivation

$$f'' = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)'' = -\frac{1}{\lambda}f$$

On en déduit

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \begin{cases} \alpha\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) & \text{si } \lambda > 0 \\ \alpha\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \beta\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Or, on a la forme

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 (1-\max(s,t))\min(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$f(0) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)(1) = 0$$

On en déduit $\alpha = 0$ quelque soit le signe de λ puis on exclut $\lambda < 0$ sans quoi on aurait $\beta = 0$ et donc f nulle. Ainsi, on a $\lambda > 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ avec k entier non nul et $f \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \sin(\pi kt))$. Réciproquement, on choisit $f(t) = \sin(\pi kt)$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ avec k entier non nul. On a

$$f'' = -(\pi k)^2 f$$

puis après intégration

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad f'(1) - f'(s) = \int_s^1 f''(t)\,\mathrm{d}t = -(\pi k)^2\int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\pi k)^2}\left[f'(s) - f'(1)\right]$$

Par intégration par parties (licite, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$), on trouve

$$\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sin(\pi kt)\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\cos(\pi kt)}{\pi k}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \cos(\pi kt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

et
$$\frac{1}{(\pi k)^2}f'(1) = \frac{\cos(\pi k)}{\pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi k}$$

Ainsi, on a
$$\int_s^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\pi k)^2}f'(s)$$

ce qui prouve
$$\left(\mathrm{T}(f) - \frac{1}{(\pi k)^2}f\right)' = 0$$

Enfin, comme $\mathrm{T}(f) - \dfrac{1}{(\pi k)^2}f$ s'annule en 0, la réciproque est établie. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les valeurs propres de T sont les } \dfrac{1}{\pi^2k^2} \text{ d'espaces propres associés}\\ \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \sin(\pi kt)) \text{ avec les } k \text{ entiers non nuls.}\end{array}}$$

Remarque : La plus grande valeur propre de T est $\dfrac{1}{\pi^2} \simeq 0.1013\ldots$ et la constante de majoration établie précédemment est $\dfrac{1}{3\sqrt{10}} \simeq 0.1054\ldots$. C'est donc une assez bonne majoration.

Exercice 10 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$ en utilisant le lemme des noyaux puis sans l'utiliser.
3. On suppose désormais E de dimension finie. Montrer $$\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$

Corrigé : Exercice 62 CCINP 2023

Exercice 11 (CCINP 2019)

Pour $x > 0$, on pose $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Domaine de définition, monotonie et continuité de f.
2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la préciser.
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Pour $x > 0$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées d'où la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. La fonction somme décroît sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme somme de telles fonctions.

Pour $a > 0$, on a $$\forall n \geqslant 1 \qquad \|f_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$$

et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ converge ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$ de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{, décroissante et continue.}}$$

2. D'après ce qui précède, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Or, on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad f_n(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

D'après le théorème de double limite, on conclut

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0}$$

3. On remarque $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)}$$

On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x > 0 \qquad v_n(x) = \mathrm{e}^{-x\left(\sqrt{n}-1\right)}$$

Il vient par croissances comparées

$$\|v_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}+1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence normale sur $[\,1\,;+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ et par double limite comme $v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ pour tout $n \geqslant 2$, on trouve

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)} = 0$$

Ainsi $$\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x})$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 12 (Centrale 2021)

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre, de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $f_a(x) = ax$. Montrer que f est un automorphisme linéaire de $\mathbb{K}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre mais pas $(1, a, a^2)$.
3. Montrer que l'on peut trouver $\mathrm{i} \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. En déduire que $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corrigé : 1. On rappelle que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau et qu'on a

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^2 \qquad (\lambda \cdot x)y = \lambda \cdot (xy) = x(\lambda \cdot y)$$

Ainsi

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^2 \qquad f_a(x + \lambda y) = a(x + \lambda \cdot y) = ax + \lambda \cdot (ay) = f_a(x) + \lambda \cdot f_a(y)$$

Puis, par intégrité de $\mathbb{K}$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad f_a(x) = 0 \iff ax = 0 \iff x = 0$$

L'application f_a est donc un endomorphisme injectif dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et par conséquent

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{K}^* \qquad f_a \in \mathrm{GL}(\mathbb{K})}$$

Remarque : On en déduit notamment que $\mathbb{K}$ est un corps puisque pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, on dispose, par surjectivité de f_a, de $b \in \mathbb{K}$ tel que $f_a(b) = 1$, c'est-à-dire $ab = 1$.

2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Ce choix est possible puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. La famille $(1, a)$ n'est pas liée, sans quoi on aurait a colinéaire à 1 puisque 1 est non nul, ce qui impliquerait a réel. La famille $\left(a^k\right)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{K}$ qui est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Il s'agit donc d'une famille liée d'où l'existence de $(\alpha_k)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{d+1}}\}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k a^k = 0$. Ainsi, posant $\mathrm{R} = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k \mathrm{X}^k$, on a montré

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme non nul } \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ tel que } \mathrm{R}(a) = 0.}$$

Considérant l'écriture de R comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on en déduit, par intégrité de $\mathbb{K}$, qu'il existe $\mathrm{P}_a \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ irréductible tel que $\mathrm{P}_a(a) = 0$. On a $\deg \mathrm{P}_a > 1$ par liberté de $(1, a)$ et comme les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont de degré 1 ou 2, on conclut $\deg \mathrm{P}_a = 2$ d'où

$$\boxed{\text{La famille } (1, a) \text{ est libre mais pas } (1, a, a^2).}$$

3. On peut choisir P_a unitaire. On note $\mathrm{P}_a = \mathrm{X}^2 + \alpha \mathrm{X} + \beta$ avec α, β réels tels que $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Puis, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_a(a) = 0 \iff a^2 + \alpha a + \beta = 0 &\iff \left(a + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4} = 0 \\
&\iff \left(\frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\left(a + \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

On pose
$$b = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\left(a + \frac{\alpha}{2}\right)$$

L'élément b vérifie alors $b^2 + 1 = 0$. La famille $(1, b)$ est libre sans quoi b serait réel et on note $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}\,(1, b)$. Montrons $\mathrm{A} = \mathbb{K}$. On procède par l'absurde en considérant $c \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{A}$. En particulier, on a $c \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathbb{R}$ et en procédant comme pour la construction de b, on obtient l'existence de $d \in \mathrm{Vect}\,(1, c)$ tel que $d^2 + 1 = 0$. Il s'ensuit $d^2 = b^2$ puis $(d - b)(d + b) = 0$ par commutativité de $\mathbb{K}$ et par intégrité $d = b$ ou $d = -b$. Il en résulte que $b = \pm\, d = \lambda + \mu c$ avec λ, μ réels et $\mu \neq 0$ sinon b réel d'où $c \in \mathrm{Vect}\,(1, b) = \mathrm{A}$ ce qui est faux. On en déduit que $\mathbb{K} = \mathrm{Vect}\,(1, b)$. Enfin, on considère

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{K} \\ z \longmapsto \mathrm{Re}\, z + b\,\mathrm{Im}\, z \end{cases}$$

et on vérifie sans difficulté que φ est un isomorphisme d'algèbres. On conclut

$$\boxed{\text{La } \mathbb{R}\text{-algèbre } \mathbb{K} \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.}$$

Exercice 13 (Centrale 2017)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note S la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire canonique. Soit F un sev non trivial de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathrm{R_M(F)} = \operatorname*{Max}_{\mathrm{X \in F \cap S}} \mathrm{X^\top M X}$$

1. Écrire une fonction qui renvoie la liste ordonnée dans l'ordre croissant des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle M : $[\lambda_1(\mathrm{M}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{M})]$. On pourra utiliser la fonction `sorted` qui trie une liste.
2. Écrire une fonction qui, pour A et B matrices symétriques réelles, renvoie la liste des
$$\frac{|\lambda_k(\mathrm{A}) - \lambda_k(\mathrm{B})|}{\max(|\lambda_1(\mathrm{A}-\mathrm{B})|\,,|\lambda_n(\mathrm{A}-\mathrm{B})|)} \text{ pour } k \in [\![1\,;\,n]\!]$$
Appliquer cette fonction à deux matrices symétriques réelles choisies aléatoirement.
3. Montrer que $\mathrm{R_M(F)}$ est bien défini.
4. On considère $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $(\lambda_1(\mathrm{M}), \ldots, \lambda_n(\mathrm{M}))$. Soit $d \in [\![1\,;\,n]\!]$. Si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_d)$, montrer
$$\mathrm{R_M(F)} = \lambda_d(\mathrm{M})$$
5. On considère à présent F un sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d entier et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(v_d, \ldots, v_n)$. Montrer que $\mathrm{F \cap G \cap S} \neq \varnothing$. En déduire
$$\mathrm{R_M(F)} \geqslant \lambda_d(\mathrm{M})$$
6. Soient A, B symétriques réelles. On note $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.
   (a) On considère F et G deux sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intersection non triviale. Montrer
   $$\mathrm{R_C(F \cap G)} \leqslant \mathrm{R_A(F)} + \mathrm{R_B(G)}$$
   (b) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + n$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \leqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
   (c) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + 1$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \geqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
7. Montrer que l'application N qui à $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ associe $\operatorname*{Max}_{\mathrm{X \in S}} \|\mathrm{MX}\|$ est une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
8. Exprimer N(M) en fonction des $\lambda_k(\mathrm{M})$.
9. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Montrer que l'application $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M})$ est lipschitzienne.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def sp_ord(M):
    return sorted(alg.eigvals(M))
```

2. On saisit :

```
def qR(A,B):
    dL=[abs(x) for x in sp_ord(A-B)]
    den=max(dL[0],dL[-1])
    spA=sp_ord(A)
    spB=sp_ord(B)
    n=len(spA)
    return [abs(spA[k]-spB[k])/den for k in range(n)]
```

On expérimente avec :

```
def rd_mat(n):
    res=rd.random((n,n))
    return res+np.transpose(res)

N=1000
n=5
res=0
for k in range(N):
    A=rd_mat(n)
    B=rd_mat(n)
    res=max(max(qR(A,B)),res)
print(res)
```

On obtient

```
res= 0.978585782496
```

On peut conjecturer $\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M}) \text{ est 1-lipschitzienne.}}$

3. L'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j$ est polynomiale donc continue sur $\mathrm{F} \cap \mathrm{S}$ fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'un compact et par conséquent

$$\boxed{\text{La quantité } \mathrm{R}_\mathrm{M}(\mathrm{F}) \text{ est bien définie.}}$$

4. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}$. On note $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{d} x_i v_i$ avec $\sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1$. On a

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{M}\mathrm{X} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{d} x_i v_i, \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(\mathrm{M}) x_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_d(\mathrm{M})$$

et pour $\mathrm{X} = v_d$, on a bien $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}$ avec $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \lambda_d(\mathrm{M})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_\mathrm{M}(\mathrm{F}) = \lambda_d(\mathrm{M})}$$

5. Supposons $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. D'après la formule de Grassmann, on aurait alors

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = d + n - d + 1 = n + 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sev non trivial et s'il contient un vecteur X non nul, alors il contient $\mathrm{X}/\|\mathrm{X}\|$ par stabilité par combinaison linéaire. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{S} \neq \varnothing}$$

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{S}$. On note $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=d}^{n} x_i v_i$ avec $\sum\limits_{i=d}^{n} x_i^2 = 1$. On a

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{MX} \rangle = \sum_{i=d}^{n} \lambda_i(\mathrm{M}) x_i^2 \geqslant \lambda_d(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \underset{\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{X}^\top \mathrm{MX} \geqslant \underset{\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{X}^\top \mathrm{MX}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{R}_\mathrm{M}(\mathrm{F}) \geqslant \lambda_d(\mathrm{M})}$$

6.(a) Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \cap \mathrm{S}$. En particulier, on a $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{G} \cap \mathrm{S}$ puis

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{CX} = \mathrm{X}^\top \mathrm{AX} + \mathrm{X}^\top \mathrm{BX} \leqslant \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{F}) + \mathrm{R}_\mathrm{B}(\mathrm{G})$$

Passant à la borne supérieure, on obtient

$$\boxed{\mathrm{R}_\mathrm{C}(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \leqslant \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{F}) + \mathrm{R}_\mathrm{B}(\mathrm{G})}$$

6.(b) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres ordonnées et de même pour $(v_1, \ldots, v_n)$ avec B. On pose

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_m)$$

D'après le résultat de la question 3, on a

$$\mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{F}) = \lambda_\ell(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_\mathrm{B}(\mathrm{G}) = \lambda_m(\mathrm{B})$$

Si $\dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = 0$, alors $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = n + k > n$ ce qui est absurde. Par ailleurs, on a

$$d = \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) \geqslant \ell + m - n \geqslant k$$

D'après le résultat de la question 5, il vient

$$\mathrm{R}_\mathrm{C}(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \geqslant \lambda_d(\mathrm{C}) \quad \text{et} \quad \lambda_d(\mathrm{C}) \geqslant \lambda_k(\mathrm{C})$$

Ainsi $$\boxed{\lambda_k(\mathrm{C}) \leqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})}$$

6.(c) Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on observe

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \lambda_i(-\mathrm{M}) = -\lambda_{n+1-i}(\mathrm{M})$$

On a $n + 1 - \ell + n + 1 - m = n + (n + 1 - k)$ puis, avec le résultat de la question précédente appliquée à $-\mathrm{A}$, $-\mathrm{B}$ et $-\mathrm{C}$, il vient

$$\lambda_{n+1-k}(-\mathrm{C}) \leqslant \lambda_{n+1-\ell}(-\mathrm{A}) + \lambda_{n+1-m}(-\mathrm{B})$$

Avec la remarque préliminaire, on conclut

$$\boxed{\lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B}) \leqslant \lambda_k(\mathrm{C})}$$

7. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. On a

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S} \qquad \|(\mathrm{A} + \mathrm{B})\mathrm{X}\| \leqslant \|\mathrm{AX}\| + \|\mathrm{BX}\| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B})$$

Passant à la borne supérieure en $\mathrm{X} \in \mathrm{S}$, on en déduit que N satisfait l'inégalité triangulaire. Supposons $\mathrm{N}(\mathrm{M}) = 0$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $\mathrm{X}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$, notant $\mathrm{U} = \mathrm{X}/\|\mathrm{X}\|$, on a $\mathrm{U} \in \mathrm{S}$ puis

$$0 \leqslant \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|} = \|\mathrm{MU}\| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{M}) = 0$$

d'où $\mathrm{MX} = 0$ et par suite $\mathrm{M} = 0$. Enfin, pour $(\lambda, \mathrm{M}) \in \mathbb{R} \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a pour $\mathrm{X} \in \mathrm{S}$

$$\|\lambda \mathrm{MX}\| = |\lambda|\, \|\mathrm{MX}\| \leqslant |\lambda|\, \mathrm{N}(\mathrm{M})$$

puis $$\mathrm{N}(\lambda\mathrm{M}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}(\mathrm{M})$$
et pour $\lambda \neq 0$, on a
$$\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\mathrm{M}\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{N}(\lambda\mathrm{M})$$
On conclut $$\boxed{\text{L'application N est une norme sur } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

8. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Avec les notations définies précédemment, pour $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, on a
$$\|\mathrm{MX}\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\mathrm{M})x_i v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}|\lambda_i(\mathrm{M})|\right)^2$$
Sans difficulté, on constate que
$$\operatorname*{Max}_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}|\lambda_i(\mathrm{M})| = \operatorname{Max}\left(|\lambda_1(\mathrm{M})|\,,|\lambda_n(\mathrm{M})|\right)$$
En choisissant le vecteur X vecteur propre associé à la valeur propre dont la valeur absolue réalise le maximum, on constate que l'inégalité précédente peut être une égalité et on conclut
$$\boxed{\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \operatorname{Max}\left(|\lambda_1(\mathrm{M})|\,,|\lambda_n(\mathrm{M})|\right)}$$
9. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Avec le résultat de la question 6.(c), on obtient
$$\lambda_k(\mathrm{A}) - \lambda_k(\mathrm{B}) = \lambda_k(\mathrm{A}) + \lambda_{n+1-k}(-\mathrm{B}) \leqslant \lambda_n(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$
et l'autre inégalité suit par symétrie des rôles. On conclut
$$\boxed{\text{Pour } k \in [\![1\,;\,n]\!]\text{, l'application } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M}) \text{ est 1-lipschitzienne.}}$$

Exercice 14 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $A_n = \left(X_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes. On note $D_n = \det A_n$.

1. Avec l'outil informatique, estimer les valeurs de $\mathbb{E}(D_n)$ et $\mathbb{V}(D_n)$ pour différentes valeurs de n lorsque les $X_{i,j}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer ces conjectures pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. Établir $$\mathbb{E}(D_n) = \det\left(\mathbb{E}(X_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
4. Soit x réel. Calculer $\mathbb{E}(\chi_{A_n}(x))$ dans le cas où les $X_{i,j}$ ont la même loi.
5. On suppose les $X_{i,j}$ centrées réduites.
   (a) Soient σ et τ deux permutations de $[\![1\,;\, n]\!]$. Montrer
   $$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} X_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) Calculer $\mathbb{V}(D_n)$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def A(n):
    return 2*rd.randint(0,2,(n,n))-1

N=10000
for n in range(1,6):
    m1=0
    m2=0
    for k in range(N):
        D=alg.det(A(n))
        m1+=D
        m2+=D**2
    print("n=",n)
    print("E(D_n)=",m1/N)
    print("V(D_n)=",m2/N-(m1/N)**2)
    print()
```

On observe :

```
n= 1
E(D_n)= -0.002
V(D_n)= 0.999996

n= 2
E(D_n)= -0.0206
V(D_n)= 1.98717564

n= 3
E(D_n)= -0.0312
V(D_n)= 6.06942656
```

```
n= 4
E(D_n)= -0.036
V(D_n)= 24.030703999999997

n= 5
E(D_n)= -0.15359999999999996
V(D_n)= 119.32360703999997
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$

2. Pour $n = 1$, on a $\mathrm{D}_1 = \mathrm{X}_{1,1}$ d'où $\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0$ puis $\mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2) = \mathbb{E}(1) = 1$. Pour $n = 2$, on a $\mathrm{D}_2 = \mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}$ puis par linéarité de l'espérance et indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \ldots = 0$$

Puis $$\mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) + \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1})$$

avec $$\mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2\mathrm{X}_{1,2}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2}) = 1$$

et de même pour l'autre terme. On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = 2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = 2}$$

3. On a $$\mathrm{D}_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}$$

Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right)$$

Par indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \det\big(\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$$

4. Soit x réel. On a $\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \big(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\big)$

d'où $$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \big(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})\big)$$

Notant $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$ et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, on trouve

$$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mu\mathrm{J})$$

On effectue les opérations $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ puis $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mu\mathrm{C}_1$ et on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = x^{n-1}(x - n\mu)}$$

5.(a) Soit $(\sigma, \tau) \in \mathrm{S}_n^2$. On a par indépendance

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i}) = 0$$

Ainsi, d'après le relation de König-Huygens, il vient

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right)$$

Si $\sigma \neq \tau$, il existe $i_0 \in [\![1 \,;\, n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$ d'où

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}\mathrm{X}_{\tau(i_0),i_0} \prod_{i\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} \ldots\right) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}) \times \ldots = 0$$

Si $\sigma = \tau$, on a
$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}^2\right) = \mathbb{E}(1) = 1$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \sum_{\tau\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) \\ &= \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathrm{S}_n^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 = \mathrm{Card}\ \mathrm{S}_n\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$$

Exercice 15 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \dfrac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

   Tracer sur un même graphe les sommes partielles de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$. Quelles conjecturer peut-on émettre ? (On pourra approcher R_n par une somme à 100 termes.)

   À présent, on considère $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. On pose $\mathrm{R}_= \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour n entier.

2. Montrer $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$

   En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$.

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Montrer

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$

   En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$.

4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ tel que :
   — Pour tout $\beta \in\,]\,0\,;\alpha\,[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ converge ;
   — Pour tout $\beta \in\,]\,\alpha\,;+\infty\,[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ diverge.

5. Donner la valeur de α dans le cas $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
ef a(n):
    return 1/n**2

def R(n):
    return sum([a(k) for k in range(n+1,n+1001)])

tn=range(1,100)
u1=[a(n+1)/R(n) for n in tn]
u2=[a(n+1)/np.sqrt(R(n)) for n in tn]
u3=[1/(2*n) for n in tn]
t1=[sum(u1[:n+1]) for n in tn]
t2=[sum(u2[:n+1]) for n in tn]
t3=[sum(u3[:n+1]) for n in tn]



plt.plot(tn,t1,tn,t2,tn,t3)
```

```
plt.legend(['q1','q2','q3'])
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

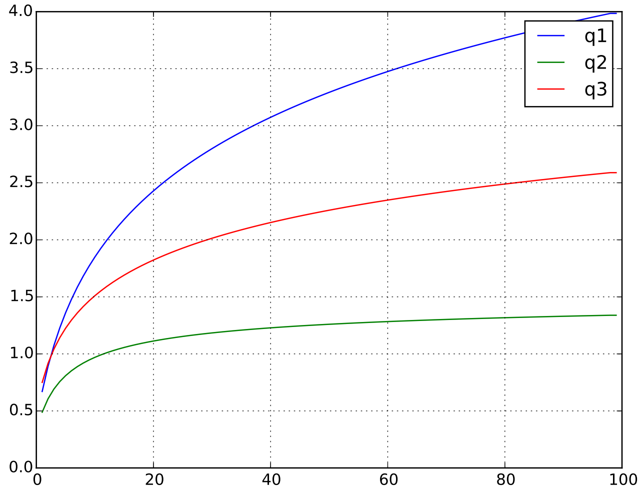

FIGURE 7 – Tracé des sommes partielles

On conjecture $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge et } \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$

2. Soit n entier non nul. On a

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} = \frac{\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant \int_{\mathrm{R}_{n+1}}^{\mathrm{R}_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$ est téléscopique avec $\sqrt{\mathrm{R}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où sa convergence. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge.}}$$

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. La suite $(\mathrm{R}_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Ainsi, on a

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant \sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_m} = \frac{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$

D'où $\boxed{\forall 1 \leqslant m \leqslant n \qquad \sum_{i=m}^{n} \dfrac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \dfrac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}}$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on a dans $[\,0\,;+\infty\,]$ avec le point de vue des familles sommables à termes positifs

$$\forall m \geqslant 1 \qquad \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ converge, alors son reste serait de limite nulle ce qui est impossible d'après la minoration précédente. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$$

4. Considérons l'ensemble $\quad \mathrm{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \text{ converge} \right\}$

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ puisque $\frac{1}{2} \in \mathrm{E}$. D'après ce qui précède, on a $1 \notin \mathrm{E}$ et plus généralement, pour $x \geqslant 1$, avec $(\mathrm{R}_n)^x \leqslant \mathrm{R}_n$ pour n assez grand, il s'ensuit que $\frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \geqslant \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ à partir d'un certain rang. On en déduit que E est majoré par 1 et on peut donc poser

$$\boxed{\alpha = \operatorname{Sup} \mathrm{E}}$$

Par définition d'une borne supérieure, les propriétés attendues sont immédiates.

5. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x}{n^2} = \frac{1}{n^{2-x}}$$

On en déduit $\quad \boxed{\alpha = 1}$

Exercice 16 (Centrale 2015)

On définit la suite de fonctions $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_\mathrm{N}(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

1. Écrire une fonction `S(N,x)` d'argument N entier et $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ qui renvoie $\mathrm{S}_\mathrm{N}(x)$.
2. Tracer le graphe de S_N.
3. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_\mathrm{N}$ converge simplement sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$.
5. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.
6. Montrer $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\mathrm{S}(x)$
7. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - \mathrm{S}(x)$ vérifie la même relation.
8. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def S(N,x):
    res=0
    for n in range(-N,N+1):
        res+=1/(x+n)
    return res
```

2. On saisit :

```
N=100
tx=np.linspace(-2.5,2.5,1000)
tS=[S(N,x) for x in tx]
plt.plot(tx,tS)
plt.grid();plt.axis([-2.5,2.5,-5,5])
plt.show()
```

On observe :

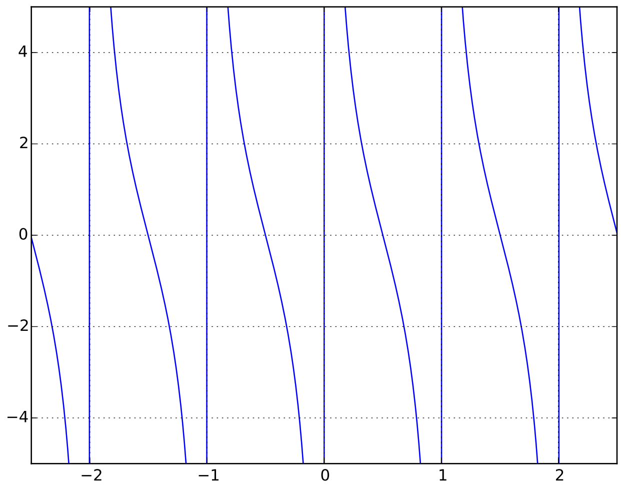

FIGURE 8 – Graphe de S_{100}

3. Montrons l'égalité suggérée en préambule. Soit N entier et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On a

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{x+n}$$

avec un changement d'indice dans la dernière somme, on trouve

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

On a
$$\frac{2x}{x^2-n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2-n^2}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (S_N)_N \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$$

4. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On a

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |x| \leqslant |a| + |b|$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant |a| + |b| \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \left|\frac{2x}{x^2-n^2}\right| \leqslant \frac{2(|a|+|b|)}{n^2-(|a|+|b|)^2}$$

On en déduit la convergence normale sur tout segment et par conséquent

$$\boxed{\text{La série définissant S converge uniformément sur tout segment de } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$$

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

La fonction S est somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ d'où la continuité de S sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. L'expression de $S(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ montre que S est clairement impaire. Enfin, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} S(x)$$

et $$\mathrm{S_N}(x+1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{S}(x+1)$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction S est continue sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}\text{, impaire et 1-périodique.}}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ et N entier. On a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n+1}$$

On remarque, en distinguant les termes d'indices pairs et impairs, qu'on a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+2\mathrm{N}+1} = \mathrm{S_{2N}}(x) + \frac{1}{x+2\mathrm{N}+1}$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\mathrm{S}(x)}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 2\operatorname{cotan}(\pi x)$$

Par suite $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ vérifie la relation fonctionnelle de la fonction S.}}$$

8. On a $$\mathrm{S}(x) - \frac{1}{x} = 2x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$$

On montre sans difficulté que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ est continue sur un voisinage de zéro et par conséquent

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

Puis, avec les développements usuels, il vient

$$\pi\operatorname{cotan}(\pi x) = \pi\frac{1+\mathrm{o}(1)}{\pi x + \mathrm{o}(x)} = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

D'où $$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} = 0$$

Par 1-périodicité, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to k]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction f peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$. Soit $\widetilde{f}$ son prolongement sur $[\,0\,;1\,]$, $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\alpha) = \operatorname*{Max}_{[\,0\,;1\,]} \widetilde{f}$ et $\beta \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\beta) = \operatorname*{Min}_{[\,0\,;1\,]} \widetilde{f}$. On trouve

$$2\widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)\ , \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)$$

On en déduit notamment $$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \widetilde{f}(\alpha)$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

et par continuité de $\widetilde{f}$ $$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{f}(0) = 0$$

On en déduit $\widetilde{f}(\alpha) = 0$. En appliquant le même raisonnement à $-f$, on obtient $\widetilde{f}(\beta) = 0$ d'où la nullité de $\widetilde{f}$ sur $[\,0\,;1\,]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. On conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)}$$

Exercice 17 (Centrale 2017)

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires dans $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$ soient premiers entre eux.

On souhaite montrer
$$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$$

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et la *formule du crible* :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i\right) = \sum_{\mathrm{I}\subset\llbracket 1\,;\,k\rrbracket,\mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{1+\mathrm{Card}\,\mathrm{I}}\,\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right)$$

On définit la fonction μ de *Möbius* de $\mathbb{N}^*$ dans $\{-1,0,1\}$ de la manière suivante : $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier et $\mu(n)=(-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers distincts. Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{A}_n = \{(a,b) \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket^2 \quad | \quad a \wedge b = 1\}$$

Notant $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers dans $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$, on pose

$$\forall i \in \llbracket 1\,;\, k \rrbracket \qquad \mathrm{U}_i = \{(a,b) \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket^2 \quad | \quad p_i | a \quad \text{et} \quad p_i | b\}$$

1. Écrire une fonction `pgcd(a,b)` d'arguments des entiers a, b et qui renvoie le pgcd $a \wedge b$.
2. Vérifier la conjecture sur la limite de $(r_n)_n$.
3. Exprimer A_n en fonction des U_i.
4. Soit ℓ entier non nul. Déterminer le nombre de multiples de ℓ dans $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$.
5. En déduire le cardinal de $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ avec I une partie non vide de $\llbracket 1\,;\, k \rrbracket$.
6. Montrer
$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$
7. Conclure.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def pgcd(a,b):
    u,v=a,b
    while v!=0:
        u,v=v,u%v
    return u
```

2. Pour n entier non nul, soient $\mathrm{X}_1^{(n)}, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}^{(n)}, \mathrm{Y}_1^{(n)}, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{N}^{(n)}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}_{\llbracket 1\,;\,n \rrbracket}$. On implémente une méthode de *Monte-Carlo* avec l'estimation

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{1}_{\mathrm{X}_i^{(n)}\wedge \mathrm{Y}_i^{(n)}=1} \simeq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathrm{X}_1^{(n)}\wedge \mathrm{Y}_1^{(n)}=1}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1^{(n)} \wedge \mathrm{Y}_1^{(n)} = 1\right) = r_n$$

On saisit :

```
tr=[]
tn=range(2,100)
for n in tn:
    X=rd.randint(1,n,N)
    Y=rd.randint(1,n,N)
    res=0
    for k in range(N):
        res+=pgcd(X[k],Y[k])==1
    res/=N
    tr.append(res)
plt.plot(tn,tr)
```

```
plt.grid();plt.show()
```

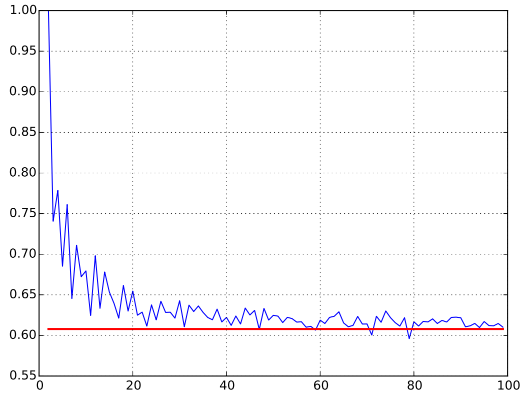

FIGURE 9 – Approximation stochastique de $(r_n)_n$

3. Un couple d'entiers de $[\![1\,;\,n]\!]^2$ n'est pas dans A_n si et seulement s'il existe un facteur premier commun à ces deux entiers, autrement dit

$$[\![1\,;\,n]\!]^2 \setminus \mathrm{A}_n = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i$$

Et on conclut
$$\boxed{\mathrm{A}_n = [\![1\,;\,n]\!]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i}$$

4. Les multiples de ℓ dans $[\![1\,;\,n]\!]$ sont ℓ, 2ℓ, $\ldots$, $\left\lfloor \dfrac{n}{\ell} \right\rfloor \ell$ et par suite

$$\boxed{\text{Il y a } \left\lfloor \dfrac{n}{\ell} \right\rfloor \text{ multiples de } \ell \text{ dans } [\![1\,;\,n]\!].}$$

5. Les éléments de $\bigcap\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ sont les couples de multiples dans $[\![1\,;\,n]\!]^2$ de $\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i$ d'où

$$\boxed{\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right) = \left\lfloor \dfrac{n}{\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i} \right\rfloor^2}$$

6. Avec la formule du crible, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n &= n^2 - \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i\right) \\
&= n^2 - \sum_{\mathrm{I}\subset [\![1\,;\,k]\!], \mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}+1}\ \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right) \\
\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n &= n^2 - \sum_{\mathrm{I}\subset [\![1\,;\,k]\!], \mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}+1} \left\lfloor \dfrac{n}{\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i} \right\rfloor^2
\end{aligned}$$

Choisir $\mathrm{I} \neq \varnothing$ dans la somme précédente équivaut, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, à choisir $d \in [\![2\,;\,n]\!]$ produit de facteurs premiers distincts. Un tel d est donc $\geqslant 2$.

L'utilisation de la fonction μ permet d'écrire une somme pour $d \in [\![2\,;\, n]\!]$, celle-ci étant complétée par des zéros dans le cas où d possède un facteur premier au carré. Ainsi, on trouve

$$\text{Card } \mathrm{A}_n = n^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Et finalement
$$\boxed{\text{Card } \mathrm{A}_n = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2}$$

7. On a
$$\forall n \geqslant 1 \qquad r_n = \frac{\text{Card } \mathrm{A}_n}{\text{Card}\,[\![1\,;\, n]\!]^2} = \frac{\text{Card } \mathrm{A}_n}{n^2}$$

Avec l'encadrement $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour x réel, il vient

$$\left(\frac{n}{d} - 1\right)^2 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leqslant \left(\frac{n}{d}\right)^2$$

puis
$$\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$$

On a $|\mu(d)| \leqslant 1$ pour tout d entier et par comparaison série/intégrale, on obtient $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d} = \mathrm{O}(\ln n)$ et par suite

$$r_n = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{o}(1)$$

Les familles $\left(\dfrac{\mu(d)}{d^2}\right)_{d \geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ sont sommables et d'après le théorème de Fubini, la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{(dn)^2}\right)_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. En considérant la partition $(\mathrm{I}_p)_{p \geqslant 1}$ avec

$$\forall p \geqslant 1 \qquad \mathrm{I}_p = \left\{(d, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad | \quad dn = p\right\}$$

il vient après sommation par paquets

$$\sum_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{dn=p} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \left(\sum_{d|p} \mu(d)\right)$$

Évaluons enfin $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$ pour n entier non nul. Les facteurs premiers de n sont $p_1, \ldots, p_k$. Comme la fonction μ s'annule en présence d'un facteur premier au carré, il vient

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, k]\!]} \mu\left(\prod_{i \in \mathrm{I}} p_i\right) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, k]\!], \text{Card } \mathrm{I} = j} \mu\left(\prod_{i \in \mathrm{I}} p_i\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = (1-1)^k$$

et par conséquent
$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{n,1}$$

d'où
$$\frac{\pi^2}{6} \left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = \sum_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\delta_{p,1}}{p^2} = 1$$

On conclut
$$\boxed{r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{6}{\pi^2}}$$

Exercice 18 (Centrale 2021)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $a \mod b$ et $a \operatorname{div} b$ le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b. Soit A un entier $\geqslant 3$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$$

On définit la *suite de Fibonacci* notée $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier.

1. Avec l'outil informatique, afficher les 20 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie en vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 \in \mathbb{N}^*$$
3. Calculer u_1.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \mathrm{F}_n x^n$. On note S sa somme.
5. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$.
6. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$
7. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$
8. Prouver la conjecture faite à la première question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def F(n):
    if n<=1:
        return n
    else:
        a,b=0,1
        for k in range(2,n+1):
            a,b=b,a+b
        return b

A=3
def u(n):
    return ((A**(n**2+n))%(A**(2*n)-A**n-1))%(A**n)

print([F(k) for k in range(1,21)])
print([u(k) for k in range(1,21)])
```

On observe :

```
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
```

On conjecture $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$

2. Pour $\mathrm{A} \geqslant 3$, on a $\mathrm{A}^n \geqslant 3$ pour n entier non nul puis

$$\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 = \mathrm{A}^n(\mathrm{A}^n - 1) - 1 \geqslant 3 \times 2 - 1 \leqslant 1$$

et il s'agit clairement d'un entier. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien définie.}}$$

3. On a
$$\mathrm{A}^2 = 1 \times (\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1) + \mathrm{A} + 1$$

Avec l'équivalence
$$\mathrm{A} + 1 < \mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1 \iff 3 < (\mathrm{A} - 1)^2$$

on constate qu'on a bien écrit la division euclidienne de A^2 par $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1$ et on conclut

$$\boxed{u_1 = (\mathrm{A} + 1) \mod \mathrm{A} = 1}$$

4. La suite $(\mathrm{F}_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ dont les racines sont φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Avec les conditions initiales, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right)$$

En observant $\varphi > 1$, il vient $\mathrm{F}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ et d'après la règle de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{\varphi}}$$

5. Soit $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Il vient avec la linéarité du symbole somme, la convergence étant réalisée

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n x^n = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_{n+2} x^{n+2} x + \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}) x^{n+2} = x + x^2\mathrm{S}(x) + x\mathrm{S}(x)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

6. Soit n entier non nul. On note

$$q_n = \mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1) \quad \text{et} \quad r_n = \mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)$$

On a
$$\mathrm{A}^{n^2+n} = q_n(\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1) + r_n$$

et
$$\mathrm{A}^{n^2+n} \equiv 0 \; [\mathrm{A}^n] \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 \equiv -1 \; [\mathrm{A}^n]$$

d'où
$$-q_n + r_n \equiv 0 \; [\mathrm{A}^n]$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n}$$

7. On montre par récurrence $\mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$ pour tout n entier. L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque $\mathrm{F}_2 = 1$ et $\mathrm{F}_3 = 2$. On la suppose vraie jusqu'au rang $n + 1$ avec n entier. Il vient

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n \leqslant \mathrm{A}^{n-1} + \mathrm{A}^{n-2} = \mathrm{A}^{n-1}\underbrace{(\mathrm{A} + 1)}_{\leqslant \mathrm{A}^2} \leqslant \mathrm{A}^n$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n}$$

8. On vérifie directement le cas $n = 1$. On suppose ensuite $n \geqslant 2$. On a

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \frac{\mathrm{A}^{-n}}{1-\mathrm{A}^{-n}-\mathrm{A}^{-2n}} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1}$$

d'où
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n}$$

puis
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

On a
$$\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2}\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

et après le changement d'indice $\ell = k-(n+1)$, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2+n^2-kn} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathrm{A}^{\ell(1-n)-1} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^{2}}$$

On vérifie par récurrence $\mathrm{A}^n < \mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^2$ pour $n \geqslant 2$. On a donc établi

$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}+\alpha_n\right) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha_n \in [\,0\,;1\,[$$

Ainsi
$$\left\lfloor \frac{\mathrm{A}^{n^2+n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

Puis
$$\left(\mathrm{A}^{n^2+n}\ \mathrm{div}\ (\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\right) \mod \mathrm{A}^{n} = \mathrm{F}_n$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$$