Exercice 1. [Centrale MP 2021]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \ln(2) u$.

1. Montrer que u est nilpotent. *Ind. On pourra calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$.*
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

Exercice 2. [Centrale MP 2021]

1. Montrer qu'il existe une unique suite (H_n) de polynômes tels que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(xt - t^2/2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n$$

2. Montrer que $H_n' = H_{n-1}$ et $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$.
3. Montrer que les H_n forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution :

1. *Soient $x, t \in \mathbb{R}$, par développement en série entière il vient :*

$$e^{xt-\frac{t^2}{2}} = e^{xt}e^{-t^2/2} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k t^k}{k!}\right)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\underset{\text{prod. Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}(-1)^{n-k}}{(2k)!2^{n-k}(n-k)!}\right) t^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}(-1)^{n-k}}{(2k+1)!2^{n-k}(n-k)!}\right) t^{2n+1}$$

ce qui donne l'existence en posant

$$\begin{cases} H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{(2k)!2^{m-k}(m-k)!} X^{2k} & \text{si } n = 2m \text{ est pair} \\ H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{(2k)!2^{m-k}(m-k)!} X^{2k+1} & \text{si } n = 2m+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour l'unicité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient l'unicité pour tout $n \in \mathbb{N}$ des réels $H_n(x)$ par unicité du développement en série entière, puis l'unicité des polynômes H_n par propriété de $\mathbb{R}[X]$ (deux polynômes égaux en une infinité de réels sont égaux).

2. *On obtient la première relation en dérivant les expressions obtenues à la question précédente.*
On obtient la deuxième en dérivant $t \mapsto e^{xt-t^2/2}$ et la série entière (possible puisque son rayon de convergence est infini) et en invoquant l'unicité du DSE.

3. *Une intégration par parties (en dérivant $x \mapsto H_n(x)e^{-x^2/2}$ et en primitivant $x \mapsto H_m(x)$ en $x \mapsto H_{m+1}(x)$) donne (le crochet généralisé converge par croissances comparées) :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N},\ (H_n|H_m) = (n+1)(H_{n+1}|H_{m+1})$$

En évaluant $x \mapsto e^{xt-t^2/2}$ et sa dérivée en 0 on obtient $H_0 = 1$ et $H_1 = X$. On peut alors poser $H_{-1} = 0$ et observer que cette convention permet d'étendre les relations de la question 2 à $n \in \mathbb{N}$.

Puis obtenir :

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ (H_n|H_m) = (n+1)(H_{n+1}|H_{m+1}) \underset{\text{symétrie}}{=} (m+1)(H_{n+1}|H_{m+1})$$

si bien que si $n \neq m$, $(H_{n+1}|H_{m+1}) = 0$ *puis* $(H_n|H_m) = 0$, *et si* $n = m$, $(H_n|H_n) > 0$ *par positivité stricte de l'intégration (argument de toute façon nécessaire pour justifier que l'on dispose d'un produit scalaire).*

On a ainsi démontré que $\mathscr{B} = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale pour le produit scalaire. En particulier c'est une famille libre.*

Enfin, une récurrence (immédiate) montre que $\mathrm{Vect}(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = \mathbb{R}_n[X]$, *si bien que tout polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *est combinaison linéaire de polynômes de la famille* $\mathscr{B}$ *(il appartient à* $\mathbb{R}_d[X]$ *où* d *est son degré) :* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}[X]$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. [CCP 2022]
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Solution :

1. *La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.*

En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
On a donc $D =]-1,1]$.

2. (a) *En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1,1[$.*
   En $x = 1$, il s'agit de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, dont la convergence est assurée par application immédiate du critère des séries alternées.
   Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de S en 1, et donc finalement sur D entier.
   (b) $\forall x \in D, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.
   $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge.*
   Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *ne converge pas normalement sur D.*
   $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le*
   théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$*, ce qui est absurde.*
   (c) *On étudie la convergence uniforme sur* $[0,1]$.
   $\forall x \in [0,1]$, *la série numérique* $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ *satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste* R_n.
   On a :
   $\forall x \in [0,1], |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. *(majoration indépendante de x)*
   Donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$ *avec* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
   Donc, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$.
   Bilan final :
   En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge normalement sur tout segment de]-1,1[et converge uniformément sur tout segment de]-1,1].*

Exercice 4. [CCINP MP 2021]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question précédente les éléments propres de B.

Exercice 5. [Mines, mais niveau X-ENS]

Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e)-t}$.

1. Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Soit $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Déterminer la probabilité que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de sous-espaces stables.

Solution :

1. *Pour $|t| < e+1$, on a :*

$$g(t) = \frac{1}{1+e} e^t \times \frac{1}{1 - \frac{t}{1+e}} = \frac{1}{1+e} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(1+e)^k} \right)$$

Par produit de Cauchy de séries entières dans leurs intervalles ouvert de convergence, on a :

$$q(t) = \frac{1}{1+e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!(1+e)^{p-k}} \right) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

avec $a_k = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!(1+e)^{p-k+1}}$. Les a_k sont positifs, et $1 = g(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ (1 est dans l'intervalle de convergence de la série entière g).

Il existe donc une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = a_k$.

2. *$\chi_M = X^n$, donc $M^n = 0$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton.*

   - *Commençons par traiter le cas où $X_{1,2}, X_{2,3}, \ldots, X_{n-1,n}$ sont non nuls (i.e. les coefficients juste au dessus de la diagonale sont non nuls).*

     On note $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on constate que $ME_i = X_{i-1,i}E_{i-1} + F_i$, avec $F_i \in \mathrm{Vect}(E_1, \ldots, E_{i-2})$. On montre donc par récurrence sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que $M^k E_n = \alpha_k E_{n-k} + G_k$, avec $G_k \in \mathrm{Vect}(E_1, \ldots, E_{n-k-1})$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$. On a donc $M^{n-1}E_n = \alpha_{n-1}E_1 \neq 0$. Montrons que $(E_n, ME_n, M^2E_n, \ldots, M^{n-1}E_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que cette famille est libre.

     Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i M^i E_n = 0$. Si tous les λ_i ne sont pas nul, alors on peut définir $k = \min\{i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. On a ainsi : $\lambda_k M^k E_n + \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i M^i E_n = 0$. En appliquant M^{n-1-k}, on a : $\lambda_k M^{n-1} E_n + \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i M^{i+n-1-k} E_n = 0$, puis : $\lambda_k M^{n-1} E_n = 0$, car $i + n - 1 - k \geqslant n$, pour $i \geqslant k+1$. Mais $\lambda_k \neq 0$ et $M^{n-1}E_n \neq 0$, donc cela est impossible. Ainsi on a : $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, puis la famille $(E_n, ME_n, M^2E_n, \ldots, M^{n-1}E_n)$ est libre dans un espace vectoriel de dimension n, donc c'est une base de cet espace.

Montrons maintenant que : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\dim(\ker(M^i)) = i$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$ *(le cas* $i = 0$ *étant évident).*
Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Il existe* $u_0, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ *tels que* $U = \sum_{k=0}^{n-1} u_k M^k E_n$. *On a :*
$M^i U = \sum_{k=0}^{n-1} u_k M^{k+i} E_n = \sum_{k=0}^{n-k-1} u_k M^{k+i} E_n$. *Comme la famille* $(M^k E_n, \ldots M^{n-1} E_n)$ *est libre, alors on a :* $U \in \ker(M^i) \Leftrightarrow u_0 = u_1 = \ldots = u_{n-k-1} = 0 \Leftrightarrow U \in vect(M^{n-k}E_n, M^{n-k+1}E_n, \ldots, M^{n-1}E_n)$. *Ainsi on a* $\ker(M^i) = vect(M^{n-k}E_n, M^{n-k+1}E_n, \ldots, M^{n-1}E_n)$, *ce qui donne le résultat.*

Recherchons maintenant les sous-espaces stables de M. *Soit* F *un sous-espace stable de* M *différent de* $\{0\}$.

Soit $k = \max\{i \in [\![1,n]\!],\ \exists X \in F,\ M^{i-1}X \neq 0\}$. *Ce max existe car notre ensemble est majoré et non vide (car pour* $i = 1$, *il existe* $X \in F$ *non nul avec* $M^0 X = X \neq 0$*).*

Par conséquent on a : $F \subset \ker(M^k)$, *donc* $\dim(F) \leqslant k$. *Soit* $X \in F$ *tel que l'on ait :* $M^{k-1}X \neq 0$ *(et* $M^k X = 0$*). On montre que* $(X, MX, M^2X, \ldots, M^{k-1}X)$ *est libre (même méthode que pour* $(E_n, ME_n, M^2E_n, \ldots, M^{n-1}E_n)$*). C'est une famille libre de* F, *car* F *est stable par* M, *donc* $k \leqslant \dim(F)$. *Ainsi* $\dim(F) = k = \dim(\ker(M^k))$ *et* $F \subset \ker(M^k)$, *donc on a :* $F = \ker(M^k)$. *Ainsi nous n'avons qu'un nombre fini de sous-espaces stables par* M *dans le cas où* $X_{1,2}, X_{2,3}, \ldots, X_{n-1,n}$ *sont non nuls.*

- *Traitons le cas où au moins un des* $X_{1,2}, X_{2,3}, \ldots, X_{n-1,n}$ *est nul. Soit* i *le plus petit indice tel que* $X_{i,i+1} = 0$. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on pose* $F_\lambda = vect(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_i + \lambda E_{i+1})$. *Pour* $1 \leqslant k \leqslant i-1$, *on a bien* $ME_k \in vect(E_1, \ldots, E_{k-1}) \subset F_\lambda$. *Et :* $M(E_i + \lambda E_{i+1}) \in vect(E_1, \ldots, E_{i-1}) \subset F_\lambda$, *car* ME_{i+1} *a une composante sur* E_i *qui vaut* $X_{i,i+1} = 0$.
  Ainsi F_λ *est stable par* M.

  Montrons que les F_λ *sont deux à deux distincts. Soient* $\lambda \neq \mu$. *Supposons que* $E_i + \lambda E_{i+1}$ *soit dans* F_μ. *Il existe donc* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \in \mathbb{R}$ *tels que :* $E_i + \lambda E_{i+1} = \sum_{k=1}^{i-1} x_k E_k + x_i(E_i + \mu E_{i+1})$. *Comme* $(E_1, \ldots, E_i, E_{i+1})$ *est libre, alors :* $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, *puis* $x_i = 1$ *(en identifiant sur* E_i*) et* $\lambda = x_i \mu$ *(en identifiant sur* E_{i+1}*), ce qui donne* $\lambda = \mu$, *ce qui est absurde.*

  Ainsi dans ce cas, on a une infinité de sous-espaces stables par M, *par exemple les* F_λ, *avec* λ *décrivant* $\mathbb{R}$.

La probabilité cherchée est donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_{i,i+1} > 0)\right) \underbrace{=}_{\textit{indépendance}} \prod_{i=1}^{n-1} P(X_{i,i+1} > 0) = (P(X > 0))^{n-1}$$

car les coefficients de M *suivent tous la même loi que* X.
Or $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - a_0 = 1 - \dfrac{1}{1+e} = \dfrac{e}{1+e}$.
La probabilité cherchée est donc $\left(\dfrac{e}{1+e}\right)^{n-1}$.