Exercice 1. [Mines MP 2015]
Soient $a<0<b$ et F l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ dont toutes les dérivées sont positives sur $]a,b[$ (*(On dit que f est absolument monotone)*.

1. Montrer que F est stable par somme et par produit.
2. Soit $R_n(x)$ le reste de Taylor d'ordre n entre 0 et x. Montrer que R_n est une fonction croissante sur $]0,b[$.
3. Montrer que f est développable en série entière autour de 0 sur $]a,b[$.

Solution :

1. *Soient $f,g\in F$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}\geqslant 0$ et $g^{(k)}\geqslant 0$.*
Par linéarité de la dérivation, $(f+g)^{(k)}\geqslant 0$ et à l'aide de la formule de Leibniz $(fg)^{(k)}\geqslant 0$.
2. *Soit $f\in F$, soit $x\in]0,b[$, on écrit :*
$$R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=xu}{=}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$
Comme $f\in F$, $f^{(n+1)}$ est croissante sur $]a,b[$, donc $x\mapsto f^{(n+1)}(xu)$ est croissante et positive sur $]0,b[$, d'où par croissance de l'intégration la croissance et positivité de la fonction $\rho_n : x\mapsto\displaystyle\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$, puis par croissance et positivité de $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n!}$, par produit, R_n est croissante sur $]0,b[$.
3. *Soit $r=\min\{b,-a\}$ (i.e. r est le plus grand réel strictement positif tel que $]-r,r[\subset]a,b[$). Montrons que f est développable en série entière sur $]-r,r[$.*
   - *Cas $x=0$: il n'y a rien à faire le reste est nul.*
   - *Cas $x>0$.*
   Soit $x\in]0,r[$. La formule de Taylor avec reste intégral donnant :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$
   Il suffit de démontrer que $R_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   Comme toutes les dérivées de f sont $\geqslant 0$, la formule de Taylor précédente donne aussi : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant R_n(x)\leqslant f(x)$.
   La croissance de ρ_n sur $]0,b[$ donne aussi, pour tout $x'\in]x,r[$:
   $$0\leqslant\rho_n(x)\leqslant\rho_n(x')\quad\text{donc}\quad 0\leqslant\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\leqslant\frac{R_n(x')}{x'^{n+1}}\quad\text{donc}\quad 0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{x'}\right)^{n+1}R_n(x')\leqslant\left(\frac{x}{x'}\right)^{n+1}f(x')$$
   donc comme $\left|\frac{x}{x'}\right|<1$, par encadrement, $R_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   - *Cas $x<0$.*
   Soit $x\in]-r,0[$.
   $$|R_n(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n!}\rho_n(x)\underset{f^{(n+1)}\text{ croît}}{\leqslant}\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}u=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$
   Comme $|x|\in]0,r[$, d'après l'item précédent $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ est le terme général d'une série convergente, donc il tend vers 0 et par encadrement $R_n(x)$ aussi.

Exercice 2. [Centrale MP 2021]
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$.

1. Montrer que ϕ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Exprimer $\phi_X(t)$.
3. On suppose que X possède un moment d'ordre 2. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$. Exprimer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de ϕ_X.

Solution :

1. *On calcule :*

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left| e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = x_n) = 1 < +\infty$$

ce qui montre d'une part la convergence absolue de la série, puis la convergence de la série, et donc la bonne définition de ϕ_X sur $\mathbb{R}$.
Mais la majoration du module du terme général étant indépendante de t, il y a aussi convergence normale de la série de fonctions de la variable t sur $\mathbb{R}$, donc continuité de ϕ_X puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$ est continue (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

2. *On calcule en reconnaissant une série exponentielle :*

$$\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}t} - 1)}$$

3. *X admet un moment d'ordre 2, donc aussi un moment d'ordre 1. On calcule :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| f_n'(t) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(|X|) < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| f"_n(t) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| x_n^2 \right| \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(X^2) < +\infty$$

ce qui montre comme à la question 1 que les séries de fonctions de termes généraux f_n et f_n' convergent simplement sur R et la série de fonction de terme général $f"_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique, ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \phi_X"(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$$

En particulier $\mathrm{i}\mathrm{E}(X) = \phi'_X(0)$ *donc* $\mathrm{E}(x) = -\mathrm{i}\phi'_X(0)$ *et* $-\mathrm{E}(X^2) = \phi"_X(0)$ *donc* $\mathrm{V}(x) = \phi'_X(0)^2 - \phi_X"(0)$.

Exercice 3. [Mines MP 2015]
Résoudre l'équation différentielle d'inconnue x fonction à valeurs réelles :

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ x & x'' & x' \\ x' & x & x'' \end{vmatrix} = 0$$

Solution :

En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *on observe que*

$$A := \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} = aJ^2 + bJ + cI_3$$

Les valeurs propres de J étant $1, \mathrm{j}$ *et* j^2, *celle de A sont* $a+b+c$, $a\mathrm{j}^2+b\mathrm{j}+c$ *et* $a\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2+c$ *si bien que* $\det(A) = (a+b+c)(a\mathrm{j}^2+b\mathrm{j}+c)(a\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2+c)$.
L'équation différentielle précédente devient :

$$(x + x' + cx'')\underbrace{(\mathrm{j}^2 x + \mathrm{j}x' + x'')(\mathrm{j}x + \mathrm{j}^2 x' + x'')}_{=|\mathrm{j}^2 x + \mathrm{j}x' + x''|} = 0$$

Soit x une solution maximale. Supposons qu'il existe t_0 tel que $(x''+x'+x)(t_0) \neq 0$ *et considérons l'intervalle ouvert* $I =]t_1, t_2[$ *maximal contenant t_0 sur lequel la fonction continue* $x+x'+x''$ *ne s'annule pas. Sur cet intervalle,* $\mathrm{j}^2 x + \mathrm{j}x' + x'' = 0$ *donc en considérant sa partie imaginaire il vient $x = x'$ (et réciproquement si $x = x'$ alors x est solution de* $\mathrm{j}^2 x + \mathrm{j}x' + x'' = 0$*), donc sur I, x est de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Montrons maintenant que $I = \mathbb{R}$. Si t_1 est fini, par continuité de $x + x' + x''$, $3\lambda e^{t_1} = 0$ *donc $\lambda = 0$ et x est nulle, ce qui contredit l'existence de t_0. Donc $t_1 = -\infty$. On montre de même que $t_2 = +\infty$.*
Bilan : une solution de l'équation initiale est soit solution de $x''+x'+x = 0$, *soit solution de $x' = x$.*
Elle est de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ *où $a, b \in \mathbb{R}$ dans le premier cas, ou $t \mapsto \lambda e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ dans le deuxième cas.*

Exercice 4. [X 2015]
Soit (B_n) un suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de loi définie par $P(B_1=1)=p$ et $P(B_1=-1)=q$ où $p,q\in]0,1[$ et $p+q=1$.

On pose $S_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} B_k$.

On introduit la variable aléatoire $T:\omega\mapsto\inf\{k\in\mathbb{N}\,|\,S_k(\omega)=1\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et on pose $f_n=P(T=n)$.

1. Montrer que $f(1)=p$ et que : $\forall\, n\geqslant 2,\ f(n)=q\sum_{k=2}^{n-1} f(k-1)f(n-k)$.
2. Montrer que $g:s\mapsto E(s^T\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}})$ est bien définie au voisinage de 0 et que, au voisinage de 0, $g(s)=ps+qsg(s)^2$.
3. En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution :

1. $f(1)=P(T=1)=P(B_1=1)=p$.
Soit $n\geqslant 2$, on introduit $U=\inf\{k\in\mathbb{N}^*\,|\,S_k=0\}$ et la formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. associé à U donne :

$$f(n)=\sum_{k=2}^{+\infty} P(T=n,U=k)$$

(U prend des valeurs entières $\geqslant 2$.)
Or, pour réaliser $\{T=n\}$ avec $n\geqslant 2$, il est nécessaire de réaliser $\{B_1=-1\}$ et $\{U\leqslant n-1\}$. Ainsi :

$$f(n)=\sum_{k=2}^{n-1} P(B_1=-1,U=k,T=n)=\sum_{k=2}^{n-1}\underbrace{P(B_1=-1)}_{=q}\underbrace{P_{\{B_1=-1\}}(U=k)}_{=f(k-1)}\underbrace{P_{\{B_1=-1,U=k\}}(T=n)}_{=f(n-k)}$$
$$=q\sum_{k=2}^{n-1} f(k-1)f(n-k)$$

la deuxième probabilité étant obtenue par «décalage» de T et la dernière par «remise à 0» à l'instant k.

2. *Si $s\in[-1,1]$, $s^T\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}$ prend ses valeurs dans $[-1,1]$, elle admet donc une espérance finie. Sur $[-1,1]$ on calcule :*

$$\begin{aligned}g(s)=E(s^T\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}})&=\sum_{n=1}^{+\infty} s^n f(n)\\&=sp+\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} s^n q\sum_{k=2}^{n-1} f(k-1)f(n-k)}_{=s\sum_{k=2}^{n-1}s^{k-1}f(k-1)s^{n-k}f(n-k)}\\&=sp+qs\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{i+j=m} s^i f(i)s^j f(j)=sp+qsg(s)^2\end{aligned}$$

par produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

3. *On en déduit sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ que $g(s)$ est racine du trinôme X^2-X+sp, donc*

$$g(s)=\frac{1\pm\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$$

Lorsque s non nul est suffisamment proche de 0 pour que $|2pqs|<1$ et $|s|<1$, $g(s)$ est la racine dans $[-1,1]$ de ce polynôme, à savoir : $g(s)=\dfrac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$.

On dispose du DSE usuel : $\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u^n$ *où*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2} = \cdots = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n-1)}$$

Ainsi pour s *au voisinage de* 0 *:*

$$g(s) = \frac{1}{2qs} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (4pqs^2)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} p^n q^{n-1} s^{2n-1}$$

Par unicité du DSE localement en 0 *on déduit :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f(2n) = 0 \quad \text{et} \quad f(2n-1) = \frac{p^n q^{n-1}}{2(2n-1)} \binom{2n}{n}$$