ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2023)

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$

1. La fonction f admet-elle des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On pose $\mathrm{K} = [\,0\,;1\,]^2$. Justifier que la fonction f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Corrigé : Exercice 56 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer
2. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble
$$\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, f \in \mathrm{E}\right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer sa valeur.

Corrigé : Exercice 76 CCPINP 2023

Exercice 3 (CCINP 2023)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Corrigé : Exercice 99 CCINP 2023

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer $$|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$$
2. Si $\det \mathrm{A} \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

Corrigé : 1. On commence par établir l'inégalité intermédiaire dite *inégalité d'Hadamard*

$$|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2}$$

On note $u_1,\ldots,u_n$ les vecteurs lignes de A et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^\top = \det_{\mathscr{C}}(u_1,\ldots,u_n)$$

Si $(u_1,\ldots,u_n)$ est liée, l'inégalité est vraie. Supposons $(u_1,\ldots,u_n)$ libre et soit $\mathscr{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ la base orthonormée obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $(u_1,\ldots,u_n)$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B}$. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u_1,\ldots,u_n) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B} \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n)$$

La matrice P est matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$ d'où $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par suite

$$\det_{\mathscr{C}}(u_1,\ldots,u_n) = \det(\mathrm{P})\det_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n) = \pm\det_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n)$$

et $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n) = \left(\langle u_j, v_i\rangle\right)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$$

Or, on a $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1,\ldots,v_k)$$

d'où $$\forall j > i \qquad \langle u_j, v_i\rangle = 0$$

en le voyant soit par orthogonalité, soit parce que u_j est combinaison linéaire de $(v_1,\ldots,v_j)$ d'où la nullité des coefficients en v_i pour $i > j$. Ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n) = \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle u_n, v_1\rangle \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \langle u_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

Par conséquent $$|\det_{\mathscr{C}}(u_1,\ldots,u_n)| = \prod_{k=1}^{n}|\langle u_k, v_k\rangle|$$

et $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|u_k\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\langle u_k, v_i\rangle^2} \geqslant |\langle u_k, v_k\rangle|$$

On obtient $$|\det_{\mathscr{C}}(u_1,\ldots,u_n)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_2$$

et comme on a $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut

$$\boxed{|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_1 = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)}$$

2. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre puisque

$$\det_{\mathscr{C}}(u_1, \ldots, u_n) = \det \mathrm{A} \neq 0$$

On a établi
$$|\det \mathrm{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_1$$

La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|u_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u_k, v_i \rangle^2 = \langle u_k, v_k \rangle^2$$

c'est-à-dire
$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad u_k \in \mathrm{Vect}\,(v_k)$$

autrement dit
$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ famille orthogonale}$$

Puis, la deuxième inégalité est une égalité si et seulement si

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|u_i\|_2 = \|u_i\|_1$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 = \|x\|_1 &\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i x_j| \\
\|x\|_2 = \|x\|_1 &\iff (\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad x_i = 0 \quad \text{ou} \quad x_j = 0)
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on dispose de $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ et on en déduit que $\|x\|_2 = \|x\|_1$ si et seulement si $x_j = 0$ pour tout $j \neq i_0$. Ainsi, la deuxième inégalité est une égalité si et et seulement si les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ ont une unique coordonnée non nulle. En combinant avec l'orthogonalité, on conclut

> Le cas d'égalité pour $\det \mathrm{A} \neq 0$ a lieu si et seulement s'il existe des scalaires α_j non nuls et $\sigma \in \mathrm{S}_n$ tels que $a_{i,j} = \alpha_j \delta_{i,\sigma(j)}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$.

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante vérifiant

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A}) f(\mathrm{B})$$

Montrer
$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(\mathrm{A}) \neq 0$$

Corrigé : On observe $f(0) = f(0)^2$ et $f(\mathrm{I}_n) = f(\mathrm{I}_n)^2$ d'où $f(0)$ et $f(\mathrm{I}_n)$ dans $\{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, on aurait

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad f(\mathrm{M}) = f(0) f(\mathrm{M}) = f(0)$$

ce qui contredit f non constante. On en déduit $f(0) = 0$ et donc $f(\mathrm{I}_n) = 1$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On dispose de $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$. Il s'ensuit

$$f(\mathrm{A}) f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{I}_n) = 1$$

d'où $f(\mathrm{A}) \neq 0$. Réciproquement, supposons $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = r < n$. Les matrices A et $\mathrm{K}_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ ont même rang et sont donc équivalentes. Par conséquent, on dispose de P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PK}_r\mathrm{Q}$. La matrice K_r est triangulaire supérieure stricte donc nilpotente. Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'ordre p. On a

$$0 = f(0) = f(\mathrm{N}^p) = f(\mathrm{N})^p$$

d'où $f(\mathrm{N}) = 0$. Ainsi, on obtient

$$f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{P})f(\mathrm{K}_r)f(\mathrm{Q}) = 0$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(\mathrm{A}) \neq 0}$$

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + \ldots + t^n}$$

Déterminer de trois façons différentes la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 2} \mathrm{I}_n$.

Corrigé : On pose

$$\forall (n, t) \in [\![2\,; +\infty]\!] \times [\, 1\,; +\infty \,[\qquad f_n(t) = \frac{1}{1 + t + \ldots + t^n}$$

Pour n entier $\geqslant 2$, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,1\,; +\infty\,[\,, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale définissant I_n est bien convergente.

1. Soit n entier $\geqslant 4$ et $t \geqslant 1$. On observe

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \geqslant \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} t^k \geqslant \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) t^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$$

d'où $$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n - \lfloor n/2 \rfloor} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}} = \frac{1}{(n - \lfloor n/2 \rfloor) \lfloor n/2 \rfloor} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 2} \mathrm{I}_n$.

2. Pour n entier $\geqslant 3$, on a

$$\mathrm{I}_{n-1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + \ldots + t^{n-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - t}{1 - t^n}\,\mathrm{d}t$$

avec, dans cette nouvelle écriture, le caractère faussement impropre en 1. On réalise le changement de variables $u = t^n$ et il vient

$$\mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{n^2} \int_1^{+\infty} \frac{n\left(u^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{(u-1)u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On pose $$\forall (n, u) \in [\![3\,; +\infty]\!] \times]\, 1\,; +\infty \,[\qquad g_n(u) = \frac{n\left(u^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{(u-1)u} u^{\frac{1}{n}}$$

On observe pour $u \geqslant 1$ et $n \geqslant 3$

$$g_n(u) = \frac{n\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}} - 1\right)}{(u-1)u} \mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}} = \frac{\ln u + \mathrm{o}(1)}{(u-1)u} \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\ln u}{(u-1)u}$$

On fixe $u \geqslant 1$ et on pose $\qquad \forall x \geqslant 3 \qquad \lambda_u(x) = x\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{x}} - 1\right)$

Par dérivation, on trouve

$$\forall x \geqslant 3 \qquad \lambda_u'(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln u}{x}}\left(1 - \frac{\ln u}{x}\right) - 1$$

puis
$$\lambda_u'(x) \leqslant 0 \iff 1 - \frac{\ln u}{x} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\ln u}{x}}$$

et cette dernière inégalité est vraie par convexité de l'exponentielle. On en déduit la décroissance de λ_u et par suite

$$\forall (n,u) \in [\![\, 3\,;\, +\infty\,]\!] \times]\, 1\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{3\left(u^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{(u-1)u} u^{\frac{1}{3}}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}([\, 1\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})$ avec

$$\varphi(u) \underset{u\to 1}{\sim} 3\frac{1}{3}\frac{u-1}{u-1} \xrightarrow[u\to 1]{} 1 \quad \text{et} \quad \varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{u^{\frac{4}{3}}}\right)$$

On en déduit l'intégrabilité de φ sur $]\, 1\,;+\infty\,[$ et par convergence dominée, on conclut

$$\mathrm{I}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)u}\,\mathrm{d}u$$

Il s'ensuit sans difficulté que la série $\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{I}_n$ converge (critère des équivalents avec des termes de signe constant et critère de Riemann).

3. Soit n entier $\geqslant 3$. Avec le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$, on obtient

$$\mathrm{I}_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-u}{1-u^n} u^{n-3}\,\mathrm{d}u$$

Puis, avec le changement de variables $s = u^n$, on trouve

$$\mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{n(1-s^{\frac{1}{n}})}{(1-s)s^{\frac{2}{n}}}\,\mathrm{d}s$$

On pose
$$\forall (n,s) \in [\![\, 3\,;\, +\infty\,]\!] \times]\, 0\,;1\,[\qquad h_n(s) = \frac{n(1-s^{\frac{1}{n}})}{(1-s)s^{\frac{2}{n}}}$$

On a
$$\forall s \in]\, 0\,;1\,[\qquad h_n(s) = \frac{-\ln s + \mathrm{o}(1)}{(1-s)\mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-\ln s}{1-s}$$

et par inégalité de concavité

$$\forall (n,s) \in [\![\, 3\,;\, +\infty\,]\!] \times]\, 0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant h_n(s) \leqslant \psi(s) \quad \text{avec} \quad \psi(s) = \frac{-\ln s}{(1-s)s^{\frac{2}{3}}}$$

On a $\psi \in \mathscr{C}_{pm}(]\, 0\,;1\,[\,, \mathbb{R})$ avec

$$\psi(s) \underset{s\to 0}{\sim} \frac{-\ln s}{s^{\frac{2}{3}}} \underset{s\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{s^{\frac{5}{6}}}\right) \quad \text{et} \quad \psi(s) \underset{s\to 1}{\sim} \frac{1-s}{(1-s)s^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow[s\to 1]{} 1$$

d'où son intégrabilité sur $]\, 0\,;1\,[$. Par convergence dominée, on conclut

$$\mathrm{I}_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{-\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}s$$

et comme pour la méthode précédente, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{I}_n$ converge.

Dans tous les cas(!), on conclut $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 2} \mathrm{I}_n \text{ converge.}}$

Remarque : Il y a de fortes similitudes entre les méthodes 2 et 3 mais comme le processus de domination ne relève pas du même effort, on peut raisonnablement les considérer comme des méthodes distinctes. Toute suggestion de variante à ces trois méthodes est évidemment la bienvenue ...

Exercice 7 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_n$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre 1/2.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{Z}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k}\mathrm{X}_k$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant 3^n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant 2^n)$.

Corrigé : 1. Soit n entier. On sait que tout entier de $[\![\, 0\,;\, 2^{n+1}-1\,]\!]$ possède une unique écriture binaire de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} d_k 2^k$ avec les $d_k \in \{0,1\}$ ou, de manière équivalente, de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k 2^{n-k}$ avec les $x_k \in \{0,1\}$. Ainsi, par indépendance des X_k, on a pour $(x_0,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}x_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{\mathrm{X}_k = x_k\}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_k = x_k) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{Z}_n \sim \mathscr{U}_{[\![\, 0\,;\, 2^{n+1}-1\,]\!]}}$

2. Soit n entier. On a

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} k\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = k) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(2^{n+1}-1)2^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(2^{n+1}-1)$$

et $$\{\mathrm{Z}_n \geqslant 3^n\} = \{\mathrm{Z}_n - \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) \geqslant a_n\} \quad \text{avec} \quad a_n = 3^n - \frac{1}{2}(2^{n+1}-1) > 0$$

En remarquant l'inclusion

$$\{\mathrm{Z}_n - \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) \geqslant a_n\} \subset \{|\mathrm{Z}_n - \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n)| \geqslant a_n\}$$

il vient d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n - \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) \geqslant a_n) \leqslant \mathbb{P}(|\mathrm{Z}_n - \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n)| \geqslant a_n) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Z}_n)}{a_n^2}$$

Par indépendance des X_k, on obtient

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\mathrm{X}_k\right) = \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k}\mathbb{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{4^{n+1}-1}{12}$$

Par ailleurs, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$ et il s'ensuit que

$$\frac{\mathbb{V}(\mathrm{Z}_n)}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On conclut $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant 3^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Puis, on a $$\{X_n = 0\} = \left\{Z_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = 2^n - 1\right\} = \{Z_n < 2^n\}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(Z_n \geqslant 2^n) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}}$$

Remarque : Demander la limite d'une suite constante est un peu déroutant...

Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Rappeler les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in E^2 \quad \langle f(x), f(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$;
   (b) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u(F^{\perp}) \subset u(F)^{\perp}$ pour tout F sev de E.

Corrigé : 1. On a pour les identité de polarisation

$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2 \qquad \langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}}$$

et pour l'identité du parallélogramme

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

2. L'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est évidente. On suppose l'assertion (b) vraie. Soient u, v vecteurs unitaires de E. On a

$$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

Soit v vecteur unitaire de E. Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, posant $u = \dfrac{x}{\|x\|}$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$\langle u+v, u-v\rangle = 0$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = 0$

et on a $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = \langle f(u) + f(v), f(u) - f(v)\rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$

d'où $$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi $$\forall x \in E \qquad \|f(x)\| = \|f(v)\|\|x\|$$

l'égalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0_E$. Notant $c = \|f(v)\|^2$, on obtient

$$\forall x \in E \qquad \|f(x)\| = \sqrt{c}\|x\|$$

et par polarisation, on en déduit l'assertion (a). On conclut

$$\boxed{\text{Les assertions } (a) \text{ et } (b) \text{ sont équivalentes.}}$$

3. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$ pour tout F sev de E. Ainsi, pour tout $a \in \mathrm{E}$, on a $u(\mathrm{Vect}\,(a)^{\perp}) \subset u(\mathrm{Vect}\,(a))^{\perp}$ ce qui signifie, en observant $u(\mathrm{Vect}\,(a)) = \mathrm{Vect}\,(u(a))$

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle x, a\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u(x), u(a)\rangle = 0$$

et ceci vaut pour tout $a \in \mathrm{E}$. On en déduit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité. Réciproquement, on suppose que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité ou, de manière équivalente, qu'il existe c réel tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$$

Soit F sev de E et $x \in \mathrm{F}^{\perp}$. Alors, il vient

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle = 0$$

ce qui prouve $u(x) \in u(\mathrm{F})^{\perp}$ d'où $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$. On conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes solutions sont ceux conservant l'orthogonalité.}}$$

Exercice 9 (Centrale 2023)

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{C})$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. On pose

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on étend cette définition au cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $r > 0$, on note

$$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et f sa somme. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{C} \qquad \forall r > |a| \qquad f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z$$

3. En déduire que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand, on a l'égalité

$$\exp(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{z}(z\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}\,\mathrm{d}z$$

Corrigé : 1. On applique le théorème d'intégration des suites uniformément convergentes sur un segment à la suite des sommes partielles (voir cours).

2. Soit n entier, $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{z^n}{z - a}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - a}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{1 - \frac{a}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right)^k\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a
$$\sum\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\left(\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}\right)^k\right|\,\mathrm{d}t = \sum 2\pi\left(\frac{|a|}{r}\right)^k < +\infty$$

Ainsi, par intégration terme à terme, il vient

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{z^n}{z-a}\,\mathrm{d}z = r^n\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t}_{=\delta_{n,k}} = a^n$$

Puis, pour $a\in\mathbb{C}$ et $r>|a|$, on a

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right)\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

On pose

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times[\,0\,;2\pi\,]\qquad u_n(t) = \frac{1}{2\pi}b_n r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\frac{1}{1-\frac{a}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}$$

Par inégalité triangulaire inverse, on trouve

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times[\,0\,;2\pi\,]\qquad |u_n(t)| \leqslant \frac{|b_n|\,r^n}{2\pi}\frac{1}{1-\frac{|a|}{r}}$$

et on en déduit la convergence de la série $\sum\int_0^{2\pi}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Par intégration terme à terme, il vient

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n a^n$$

On conclut
$$\boxed{\forall a\in\mathbb{C}\qquad \forall r>|a|\qquad f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z}$$

3. La fonction exponentielle est développable en série entière de rayon de convergence infini avec

$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Pour $a\in\mathbb{C}$ et $r>|a|$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$\mathrm{e}^a = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\mathrm{e}^z(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

On en déduit que pour $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $r>\underset{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{D})}{\mathrm{Max}}|\lambda|$, on a, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles

$$\exp(\mathrm{D}) = \sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{\lambda_i}\mathrm{E}_{i,i} = \sum_{i=1}^n\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\mathrm{e}^z\left(z-\lambda_i\right)^{-1}\,\mathrm{d}z\mathrm{E}_{i,i} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\mathrm{e}^z\underbrace{\sum_{i=1}^n\left(z-\lambda_i\right)^{-1}\mathrm{E}_{i,i}}_{=(z\mathrm{I}_n-\mathrm{D})^{-1}}\,\mathrm{d}z$$

d'où
$$\exp(\mathrm{D}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\mathrm{e}^z(z\mathrm{I}_n-\mathrm{D})^{-1}\,\mathrm{d}z$$

Étendons ce résultat par densité à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $r>\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}$. On pose

$$\forall(\mathrm{M},t)\in\mathrm{B}(0,r)\times[\,0\,;2\pi\,]\qquad g(\mathrm{M},t) = \exp\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n-\mathrm{M}\right)^{-1}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

L'application est bien définie : pour $(\mathrm{M},t)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\times[\,0\,;2\pi\,]$, on a

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n-\mathrm{M} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\left(\mathrm{I}_n-\widetilde{\mathrm{M}}\right)\quad\text{avec}\quad \widetilde{\mathrm{M}} = r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{M}$$

et pour $\mathrm{M}\in\mathrm{B}(0,r)$
$$\|\widetilde{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{op}} = r^{-1}\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{op}} < 1$$

d'où l'inversibilité de $\mathrm{I}_n - \widetilde{\mathrm{M}}$ dont l'inverse est $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\mathrm{M}}^k$ (résultat établi dans le chapitre *Séries et Fonctions Vectorielles*). Vérifions les hypothèses de continuité sous l'intégrale.

• Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{B}(0, r)$, on a $g(\mathrm{M}, \cdot) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;2\pi\,], \mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.
• Pour $t \in [\,0\,;2\pi\,]$, la fonction $g(\cdot, t)$ est continue sur $\mathrm{B}(0, r)$. En effet, La fonction inverse décrite par $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{1}{\det \mathrm{M}}(\operatorname{Com} \mathrm{M})^\top$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisqu'elle est à coordonnées rationnelles bien définie et le reste suit.
• Soit $\delta = \dfrac{r - \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}}{2}$. La fonction g continue sur le compact $\mathrm{B}_f(\mathrm{A}, \delta) \times [\,0\,;2\pi\,]$ (produit de deux compacts) y est bornée d'où une domination par une fonction constante intégrable.

Ainsi, la fonction
$$\mathrm{M} \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \mathrm{e}^z (z\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1} \, \mathrm{d}z$$
est continue sur $\mathrm{B}_f(\mathrm{A}, \delta)$. Or, l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (exercice classique, non trivial). Par conséquent, il existe une suite $(\mathrm{D}_k)_k$ à valeurs dans $\mathrm{B}_f(\mathrm{A}, \delta) \cap \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{D}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathrm{A}$. Par continuité de l'exponentielle matricielle, on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \forall r > \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}} \qquad \exp(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \mathrm{e}^z (z\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} \, \mathrm{d}z}$$