ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.

2. On pose $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : Exercice 57 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé : Exercice 80 CCINP 2023

Exercice 3 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que l'entier n est pair.
2. On suppose $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que rg A est pair.

Corrigé : 1. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ est annulateur de A. Si l'entier n est impair, alors on a pour x réel

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = x^n + \mathrm{o}(x^n) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$$

et comme l'application polynomiale $x \mapsto \chi_{\mathrm{A}}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle admet une racine. Or, les valeurs propres de A, c'est-à-dire les racines de χ_{A} sont contenues dans $\mathrm{P}^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}$ qui est vide. On conclut

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est pair.}}$$

2. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A. L'image $\mathrm{Im}\, u$ est stable par u et on note $v = u_{\mathrm{Im}\, u}$ l'induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$. Soit $x \in \mathrm{Im}\, u$. On dispose de $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(t)$ et il vient

$$(v^2+v+\mathrm{id}\,)(x) = (u^2+u+\mathrm{id}\,)(u(t)) = (u^3+u^2+u)(t) = 0_{\mathrm{E}}$$

On applique alors le résultat de la première question à l'endomorphisme v et on conclut

$$\boxed{\text{L'entier rg } u = \text{rg A est pair.}}$$

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

1. Montre que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{C}$.
2. Établir l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
3. Désormais, on suppose seulement que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que les résultats précédents demeurent. On pourra poser $$\mathrm{A}_{-1} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

Corrigé : 1. La famille $(a_n)_n$ est sommable ce qui équivaut à la convergence absolue de la série $\sum a_n$ et par conséquent $a_n = \mathrm{o}(1)$ d'où $\frac{a_n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right)$. Il en résulte que le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction g est $+\infty$ et par propriétés sur les séries entières, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{C}.}$$

2. La série $\sum a_n$ converge absolument donc converge. Par intégration par parties, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

Par suite $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{a_n}{n!} t^n\,\mathrm{d}t$$

Notant pour n entier $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \frac{a_n}{n!} t^n$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$, on a l'intégrabilité de f_n, la convergence simple de $\sum f_n$ et

$$\sum \int_0^{+\infty} |f_n|\,(t)\,\mathrm{d}t = \sum \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum |a_n| \text{ converge}$$

Par intégration terme à terme, il vient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{a_n}{n!} t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t}$$

3. Le résultat de la première question a lieu puisqu'on a toujours $a_n = \mathrm{o}(1)$. La série $\sum a_n$ converge d'où $\mathrm{A}_n = \mathrm{O}(1)$ et il s'ensuit que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{C}$ et par dérivation de série entière

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n \frac{t^n}{n!}$$

On a $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}] \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{n-1} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{F}'(t) - \mathrm{F}(t)$$

Puis pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x [\mathrm{F}'(t) - \mathrm{F}(t)]\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-t}]_0^x = \mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un seuil N entier tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $|\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}| \leqslant \varepsilon$. Pour $x \geqslant 0$, il vient

$$\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{S} = \left(\mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}]\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}]\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$$

On a
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}]\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Puis, par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} [\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{S}]\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \varepsilon\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, on dispose d'un seuil $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que, pour $x \geqslant \mathrm{M}$, on a $|\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{S}| \leqslant 2\varepsilon$, autrement dit

$$\mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{S}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \exp\left[-\left(t^2 + \dfrac{x^2}{t^2}\right)\right]$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème continuité sous l'intégrale.

• Pour x réel, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est définie, continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. On note $\mathrm{X}' = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]$$

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On procède localement. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$. On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2b \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} \mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ avec $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ par croissances comparées puisque

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} \underbrace{=}_{u=1/t} \lim_{u \to +\infty} u^2 \mathrm{e}^{-a^2 u^2} = 0$$

La fonction φ est donc intégrable sur I et par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \dfrac{x}{t}$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2\right)\right]\,\mathrm{d}u$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0}$$

4. On en déduit
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x}$$

Par continuité en 0, il vient $\lambda = \mathrm{F}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Enfin, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est paire d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-2|x|}}$$

Exercice 6 (Centrale 2023)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,]\,0\,;+\infty\,[)$ croissante telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a}{x} \quad \text{avec} \quad a > 0$$

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison puis trouver un équivalent de $\ln f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2. Déterminer le domaine de définition de $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\mathrm{e}^{-nx}$ puis déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer qu'il existe C réel tel que

$$u(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Corrigé : 1. Cours et

$$\boxed{\ln f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x^a}$$

2. Critère de d'Alembert pour $x < 0$, $x > 0$ et minoration explicite pour $x = 0$. Domaine $]\,0\,;+\infty\,[$ puis double-limite pour $x \to +\infty$ et minoration par somme partielle et passage à la limite (existence par limite monotone) pour conclure

$$\boxed{u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \quad \text{et} \quad u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

3. Comparaison série/intégrale (délicate) pour établir que

$$u(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\Gamma(a+1)}{x}$$

⚠ Très difficile !

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Exprimer $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ à l'aide des racines de P.
3. Soir $r > 0$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On suppose que le polynôme P ne s'annule pas sur le cercle $\mathscr{C}(0,r)$ du plan complexe. On pose

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la quantité $\mathrm{N}_r(\mathrm{P})$ est égal au nombre de racines de P comptées avec multiplicité dans la disque $\mathrm{D}(0,r)$.

Corrigé : 1. Voir cours.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. Pour $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X}-\alpha_i)^{m_i}$, on trouve

$$\boxed{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{\mathrm{X}-\alpha_i}}$$

3. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. On a

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X}-a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

On a $\sum \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\left(\frac{a}{r}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right|\mathrm{d}t = \sum \left(\frac{|a|}{r}\right)^n$ qui converge en tant que série géométrique de raison $\left|\frac{a}{r}\right| < 1$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X}-a) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t}_{\delta_{n,0}} = 1$$

Supposons $r < |a|$. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_r(\mathrm{X}-a) &= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}}{1-\frac{r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}}{a}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1)t}\right|\,\mathrm{d}t = \sum\left(\frac{r}{|a|}\right)^{n+1}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{r}{|a|} < 1$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{X}-a) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=0} = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{Pour } a \in \mathbb{C}, \text{ on a } \mathrm{N}_r(\mathrm{X}-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > |a| \\ 0 & \text{si } r < |a| \end{cases}.}$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Si P est constant, on a clairement $\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = 0$ pour tout $r > 0$. Supposons P non constant. On note $\mathrm{P} = \lambda \prod_{k=1}^{s} (\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k}$ son écriture scindée dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ garantie par le théorème de d'Alembert-Gauss. Pour $r \in \left]0\,;+\infty\right[\smallsetminus \{|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_s|\}$, il vient avec les résultats des questions précédentes

$$\mathrm{N}_r(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k}{r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\alpha_k}r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{s} m_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\alpha_k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{s} m_k \mathrm{N}_r(\mathrm{X}-\alpha_k)$$

Ainsi

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $r > 0$ tel que P n'a pas de racine de module égal à r, la quantité $\mathrm{N}_r(\mathrm{P})$ représente le nombre de racines compté avec multiplicité dans $\mathrm{D}(0, r)$.