

CAHIER DE VACANCES - MATHÉMATIQUES MPSI

Été 2024

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| I Énoncés | 3 |
| Réurrence | 4 |
| Calculs | 4 |
| Sommes et produits | 4 |
| Fonctions réciproques | 5 |
| Nombres complexes | 5 |
| Primitives | 6 |
| Borne supérieure et inférieure | 6 |
| Équations différentielles | 7 |
| Suites numériques | 7 |
| Matrices | 8 |
| Bijections | 9 |
| Arithmétique | 9 |
| Limites | 10 |
| Continuité | 10 |
| Structures algébriques | 11 |
| Dérivation | 11 |
| Convexité | 12 |
| Polynômes | 12 |
| Espaces vectoriels | 13 |
| Dénombrement | 13 |
| Applications linéaires | 14 |
| Analyse asymptotique | 14 |
| Dimension finie | 15 |
| Fractions rationnelles | 16 |
| Calcul intégral | 16 |
| Probabilités finies | 17 |
| Groupe symétrique | 18 |
| Déterminants | 18 |
| Séries numériques | 19 |
| Familles sommables | 20 |
| Espaces préhilbertiens | 20 |
| II Corrigés | 22 |

La difficulté des exercices est mesurée par le nombre d'étoiles. Un hyperlien permet de naviguer de l'énoncé au corrigé et réciproquement.

Si vous détectez des coquilles, je vous serais reconnaissant de bien vouloir me les signaler à l'adresse : blandelle.math@gmail.com

I Énoncés

Récurrance

Exercice 1 (*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f .

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$

Exercice 3 (**)

On note $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k, (\alpha_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n-1} \times \{1\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A .

Exercice 4 (**)

Établir $\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

Calculs

Exercice 5 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Exercice 6 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

puis déterminer le cas d'égalité.

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x - m| \geq \varepsilon \iff x \in I$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Sommes et produits

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ et $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture télescopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{k=1}^n k3^k$$

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans \mathbb{K} . Montrer que

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Fonctions réciproques

Exercice 13 (**)

Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} \cos x$.

Exercice 14 (***)

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x| = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right)$$

Exercice 15 (***)

Résoudre

$$\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Nombres complexes

Exercice 16 (*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Montrer

$$|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Exercice 17 (**)

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos^n x$ puis $\sin^n x$.

Exercice 18 (***)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 19 (***)

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in [1; n] \quad z_i = |z_i| e^{i\theta}$$

Primitives

Exercice 20 (*)

Calculer $\int_0^1 \text{Arctan } t \, dt$

Exercice 21 (**)

Primitive de $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$

Exercice 22 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

1. Montrer
$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

2. Établir
$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

3. En déduire
$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$$

Borne supérieure et inférieure

Exercice 23 (*)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f, g fonctions majorées de I dans \mathbb{R} telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer

$$\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$$

Exercice 24 (**)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On définit $d(x, A) = \inf \{|x - a|, a \in A\}$. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

Exercice 25 (***)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f fonction majorée de I dans \mathbb{R} et $\lambda \geq 0$. Montrer

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Équations différentielles

Exercice 26 (*)

Résoudre $\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x)$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Exercice 27 (*)

Résoudre $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1; 1 [$

Exercice 28 (*)

Soient u, v dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de λ , la forme des fonctions u et v .

Exercice 29 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x \tag{E}$$

Exercice 30 (***)

Soit f dérivable sur \mathbb{R}_+ telle que

$$\forall x \geq 0 \quad |f'(x) + f(x)| \leq 1$$

Montrer $\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}$

Suites numériques

Exercice 31 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+n^2}$ pour n entier.

Exercice 32 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Exercice 33 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + bn \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 34 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Exercice 35 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour n entier.

Exercice 36 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists ! x_n \geq 0 \quad f_n(x_n) = 0$

2. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \frac{1}{2}$

3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 37 (***)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans \mathbb{U} deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans \mathbb{C}^* . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Exercice 38 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Matrices

Exercice 39 (**)

Soit la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2 .
2. En déduire que $I_n + J$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 40 (**)

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = XY^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Exercice 41 (**)

Soit $V = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Exercice 42 (*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } M = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Exercice 43 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $M^p = 0$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Bijections

Exercice 44 (**)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 1 [$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1} .

Exercice 45 (***)

Soit $f : E \rightarrow F$. On a

$$f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Exercice 46 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .
2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que π est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de π .

Arithmétique

Exercice 47 (*)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Exercice 48 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Exercice 49 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 50 (**)

Soient a, b dans \mathbb{Z} . Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Limites

Exercice 51 (*)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\text{Arctan } x} - \frac{2x}{\pi}$

Exercice 52 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a \cos t + b \sin t$ ait une limite en $+\infty$.

Exercice 53 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Continuité

Exercice 54 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Exercice 55 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

Exercice 56 (***)

On pose $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[0; 1]$.
2. La fonction $g : x \in [0; 1] \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?

Structures algébriques

Exercice 57 (*)

Soit (G, \times) un groupe et $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G . Montrer

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$$

Exercice 58 (**)

Soit (G, \star) un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de G est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes?

Exercice 59 (**)

On note $A = \left\{ \frac{m}{2^n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $U(A)$.

Dérivation

Exercice 60 (*)

En considérant la dérivée n -ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 61 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right)$

Exercice 62 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$ pour n entier.

Exercice 63 (*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Convexité

Exercice 64 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

Exercice 65 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Exercice 66 (**)

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ réels positifs, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

Polynômes

Exercice 67 (**)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 68 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt[3]{x}$$

Exercice 69 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta) \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Exercice 70 (**)

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos \theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n .

Exercice 71 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Espaces vectoriels

Exercice 72 (*)

Soit n entier non nul, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $H = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que $E = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Exercice 73 (**)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E .

Exercice 74 (***)

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \dots, a_i^n)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Dénombrement

Exercice 75 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Exercice 76 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1, \dots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Exercice 77 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par convention, on pose $\llbracket 1; 0 \rrbracket = \emptyset$.

1. Préciser $\text{Card } \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket}$.

2. Pour p et n entiers, établir
$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

3. Soit n entier et u_0, \dots, u_n des réels. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell$$

4. En déduire une formule donnant $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Applications linéaires

Exercice 78 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Exercice 79 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}$.

1. Montrer
$$E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$$

2. Montrer

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$$

Exercice 80 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et p, q des projecteurs de E . Montrer que

$$p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q$$

Quand cette condition est réalisée, montrer

$$\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Analyse asymptotique

Exercice 81 (*)

Déterminer
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

Exercice 82 (**)

Déterminer le $\text{DL}_3(0)$ de $\sin(\pi\sqrt{1+x})$.

Exercice 83 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - e^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Dimension finie

Exercice 84 (*)

Soient E et F des \mathbb{K} -ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

Exercice 85 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M) I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et préciser $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 86 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

Exercice 87 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer
$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Exercice 88 (**)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 89 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où \mathcal{C} désigne la base canonique de E .
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Fractions rationnelles

Exercice 90 (*)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 91 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec $B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit z_1, \dots, z_n des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Exercice 92 (**)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples x_1, \dots, x_n et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|$$

Calcul intégral

Exercice 93 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t)e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire les comportements de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 94 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$

Exercice 95 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi t |\sin(nt)| dt$$

Montrer que les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes.

Exercice 96 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n .
3. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
4. En considérant la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 97 (**)

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et
$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. Établir une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ si q est non nul.
2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ avec des factorielles.

Probabilités finies

Exercice 98 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note

$Y_k = \prod_{i=1}^k X_i$, $a_k = \mathbb{P}(Y_k = 1)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y_k = -1)$.

1. Montrer
$$\exists Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$
2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p .

Exercice 99 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Exercice 100 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(V^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Exercice 101 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 0; 2N \rrbracket$ avec N entier non nul. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $m = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité

$$\left\{ S_n \geq \frac{3nm}{2} \right\} = \left\{ e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tNn}{2}} \right\}$$

3. En déduire $\forall t > 0 \quad \mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) \leq e^{n\varphi(t)}$

avec
$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln \left(\frac{\text{sh}((N + 1/2)t)}{\text{sh}(t/2)} \right) - \ln(2N + 1)$$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.
5. Conclure qu'il existe $r \in]0; 1[$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) \leq r^n$$

Exercice 102 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer $\mathbb{P} \left(S_n > \frac{np}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et $\mathbb{P} \left(S_n \leq \frac{np}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left\{ S_n > \frac{np}{2} \right\} \quad \text{et} \quad B_n = \left\{ S_n \leq \frac{np}{2} \right\}$$

2. Montrer $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Groupe symétrique

Exercice 103 (*)

Soit $c = (i_1 \dots i_p)$ un p -cycle de S_n . Pour $\sigma \in S_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 104 (*)

Soit $n \geq 2$. Calculer
$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Exercice 105 (*)

Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n , r et p .

Déterminants

Exercice 106 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Exercice 107 (**)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 108 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi. On définit

$$\forall \omega \in \Omega \quad V(X_1, \dots, X_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1(\omega) & \dots & X_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{n-1}(\omega) & \dots & X_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(V(X_1, \dots, X_n))$.

Séries numériques

Exercice 109 (**)

Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.

Exercice 110 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 111 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 112 (Constante γ d'Euler **)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Familles sommables

Exercice 113 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

$$1. \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \qquad 2. \frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$$

Exercice 114 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Exercice 115 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Espaces préhilbertiens

Exercice 116 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 117 (**)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}$

Exercice 118 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E .

1. Déterminer $(F + G)^\perp$.
2. En déduire $(F \cap G)^\perp$.

Exercice 119 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$.

Exercice 120 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E . On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = x - \langle x, a \rangle a$$

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis décrire f .
2. On suppose E euclidien muni de \mathcal{B} une base orthonormée. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} a$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$.

II Corrigés

Exercice 1 (*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!$

Corrigé : On note $\mathcal{P}(n) : (2n)! \leq 2^n n!$ pour n entier. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $1 \leq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un rang n entier fixé. On a

$$(2n+2)! = 2(n+1)(2n+1)(2n)! \geq 2^{n+1}(n+1)!(2n+1) \geq 2^{n+1}(n+1)!$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!}$$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f .

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$

Corrigé : Par récurrence.

Exercice 3 (**)

On note $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k, (\alpha_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n-1} \times \{1\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A .

Corrigé : Soit $x \in A$. On a $x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k$. Si tous les α_i valent 1, on a

$$x + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n \in A$$

Sinon, notons $p = \min \{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_k = 0\}$. On a

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + 0 \times 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 \\ &= 2^p - 1 + 1 + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k = 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k \in A \end{aligned}$$

Ainsi, la partie A contient 1 et tout élément y admet un successeur d'où, par principe de récurrence, il vient $A = \mathbb{N}^*$. Supposons que x s'écrive également $x = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k 2^k$. Si $n < m$, on aurait

$$x \leq 2^n - 1 \quad \text{et} \quad x \geq 2^{m-1} \geq 2^n$$

ce qui est absurde d'où $n = m$ (symétrie des rôles). Si les β_k diffèrent des α_k , on note $q = \max \{k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket \mid \alpha_k \neq \beta_k\}$. On a

$$x - x = 0 = \pm 2^q + \sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k \quad \text{avec} \quad \left| \sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k \right| \leq 2^q - 1 < 2^q$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Tout entier non nul possède une unique écriture binaire.}}$$

Variante : Soit x entier non nul. On suppose $\llbracket 1; x \rrbracket \subset A$. Notons r_2 le reste de la division euclidienne par 2. On a

$$x + 1 - r_2(x + 1) = 2\ell$$

On a $\ell \leq x$ d'où $\ell \in A$ et par conséquent, on dispose de l'écriture $\ell = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i 2^i$ avec les $\beta_i \in \{0, 1\}$, $\beta_{n-1} = 1$. Ainsi, on a

$$x + 1 = r_2(x + 1) + \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} 2^i \in A$$

Par principe de récurrence, on conclut $A = \mathbb{N}^*$

Exercice 4 (**)

Établir $\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

Corrigé : Soit $n \geq 2$. On a

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$$

On pose $\mathcal{P}(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n}$

L'initialisation $\mathcal{P}(2)$ est vraie. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geq 2$ fixé. On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Puis, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &\iff (2n+1)\sqrt{n+1} > 2(n+1)\sqrt{n} \\ &\iff 4n^3 + 8n^2 + 5n + 1 > 4n^3 + 8n^2 + 4n \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n}$$

Remarque : Cette preuve ne permet pas de comprendre comment trouver une telle minoration. On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)}{(n!)^2} = \frac{2^{2n-1}}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)$$

Or, on observe $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^2 = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} > 1 + \frac{1}{k}$

d'où $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$

On obtient alors la minoration souhaitée.

Exercice 5 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \iff x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \iff (x - y)^2 \geq 0$$

Cette dernière assertion étant vraie, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)}$$

Exercice 6 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

puis déterminer le cas d'égalité.

Corrigé : Soient x, y réels. On a $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. En développant le carré, on en déduit l'inégalité attendue et le cas d'égalité a lieu si le carré est nul. On conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{avec} \quad |xy| = \frac{x^2 + y^2}{2} \iff |x| = |y|}$$

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x - m| \geq \varepsilon \iff x \in I$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Corrigé : On a $|x - m| \geq \varepsilon \iff x - m \geq \varepsilon \quad \text{ou} \quad x - m \leq -\varepsilon$

Ainsi

$$\boxed{I =]-\infty; m - \varepsilon] \cup [m + \varepsilon; +\infty[}$$

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Corrigé : On a $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq \frac{x}{a}$ puis $\frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \leq \frac{x}{ab}$

et par croissance de la partie entière $\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$

Ensuite, on a $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \frac{x}{ab}$ puis $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leq \frac{x}{a}$

Par croissance de la partie entière, il vient

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leq \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \quad \text{d'où} \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b}$$

et de nouveau par croissance de la partie entière

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor$$

On conclut

$$\forall (x, a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{N}^*)^2 \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor$$

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ et $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

Corrigé : Les produits d'entiers pairs consécutifs se factorisent. On complète les produits d'entiers impairs pour faire apparaître des factorielles :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k)(2k+1)} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2}$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture télescopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Corrigé : 1. D'après l'identité de Pascal, on a

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \iff \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

Par suite, pour n entier non nul, on trouve par télescopage

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^n \left[\binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \right] = \binom{n+1}{3} - \binom{1}{3}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

2. D'après ce qui précède, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \iff \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k + \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{k=1}^n k3^k$$

Corrigé : On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n k3^k = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} 3^k = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n 3^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n [3^{n+1} - 3^\ell] = \frac{1}{4} (2n3^{n+1} - 3(3^n - 1))$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

Variante : Soit n entier. Un changement d'indice donne

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)3^{k+1} = 3 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)3^k = 3(S_n - n3^n) + \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

On retrouve alors le résultat précédent. On pourrait aussi considérer $T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ (somme géométrique) et déterminer $xT'_n(x)$ puis évaluer en $x = 3$.

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans \mathbb{K} . Montrer que

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Corrigé : On a

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^{2n} \left(\sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=\ell} a_{i+j} \right) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \text{Card } I_\ell \quad \text{avec } I_\ell = \{(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid i+j = \ell\}$$

Soit $\ell \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} I_\ell &= \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; n \rrbracket, 0 \leq \ell-i \leq n\} \\ &= \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; n \rrbracket, i \leq \ell, \ell-n \leq i\} = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket \max(0, \ell-n); \min(n, \ell) \rrbracket\} \end{aligned}$$

Pour $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il vient $I_\ell = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; \ell \rrbracket\}$

et pour $\ell \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$ $I_\ell = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket \ell-n; n \rrbracket\}$

On conclut

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Exercice 13 (**)

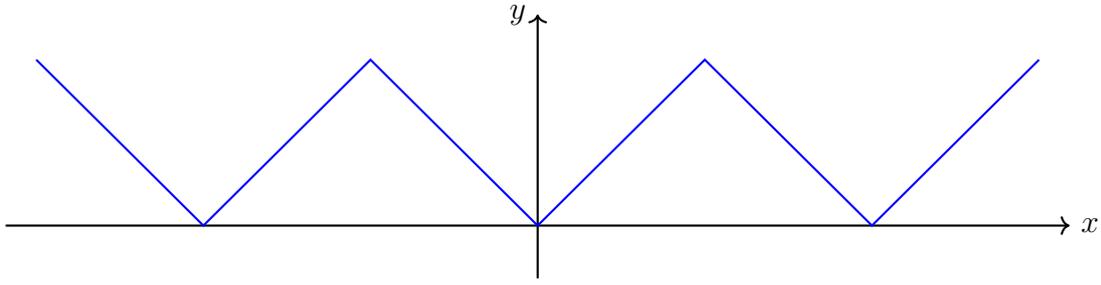
Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arccos } \cos x$.

Corrigé : On a $\forall x \in [0; \pi] \quad \text{Arccos } \cos x = x$

La fonction est clairement paire d'où

$$\forall x \in [-\pi; 0] \quad \text{Arccos } \cos x = -x$$

et elle est 2π -périodique d'où le graphe



Exercice 14 (*)**

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x| = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right)$$

Corrigé : Le domaine de définition de chaque membre est \mathbb{R} tout entier. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x - \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right)$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur \mathbb{R}_+ et $f(0) = 0$. Par parité, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x| = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right)}$$

Variante : On a pour $x \geq 0$

$$\cos^2 \operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x = \frac{1}{1 + \tan^2 \operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Puis

$$\cos \operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

et le résultat suit.

Exercice 15 (*)**

Résoudre

$$\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Corrigé : Posant $x = \frac{1}{\tan \theta}$ pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ 0, -\frac{\pi}{4} \right\}$, on a par trigonométrie

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} \tan \theta + \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) &= \theta - \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sin(\theta - \pi/4)}{\cos(\theta - \pi/4)} \right) \\ &= \theta - \operatorname{Arctan} \tan(\theta - \pi/4) \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \operatorname{Arctan} \tan u = u$$

et

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{3\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

L'angle $\theta - \frac{\pi}{4}$ sort donc de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Pour $u \in]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}[$, on a par π -périodicité de \tan

$$\operatorname{Arctan} \tan u = \operatorname{Arctan} \tan(u + \pi) = u + \pi$$

Ainsi, on a

$$\operatorname{Arctan} \tan \theta + \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\end{cases}$$

On conclut $\boxed{\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\pi}{4} \iff x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[}$

Exercice 16 (*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Montrer

$$|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Corrigé : Si $|a| = 1$. On a

$$|a-b| = |a| |1 - a^{-1}b| = |1 - \bar{a}b| \neq 0$$

d'où le résultat. Si $|b| = 1$, on a

$$|a-b| = |\bar{b}| |a-b| = |\bar{a}\bar{b} - 1| = |1 - \bar{a}\bar{b}|$$

Ainsi

$$\boxed{|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1}$$

Exercice 17 (**)

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos^n x$ puis $\sin^n x$.

Corrigé : Soit x réel et n entier. On a

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}$$

Passant à la partie réelle, on conclut

$$\boxed{\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \cos^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((2k-n)x)}$$

Puis
$$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x}$$

On distingue selon la parité. On a

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i2(n-k)x}$$

et passant à la partie réelle, il vient

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \cos(2(n-k)x)$$

Enfin, on a
$$\sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n+1-2k)x}$$

Passant à la partie réelle, il vient

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin((2n+1-2k)x)$$

Exercice 18 (***)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Corrigé : Si $p \in 2(n+1)\mathbb{Z}$, on trouve $S_{n,p} = n$. Supposons $p \notin 2(n+1)\mathbb{Z}$. On a

$$S_{n,p} = \operatorname{Re} T_{n,p} \quad \text{avec} \quad T_{n,p} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{ikp\pi}{n+1}}$$

On reconnaît une somme géométrique dans l'expression de $T_{n,p}$ et il vient

$$T_{n,p} = e^{\frac{ip\pi}{n+1}} \frac{1 - e^{\frac{in p\pi}{n+1}}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} - e^{ip\pi}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}}$$

Si l'entier p est pair, on trouve
$$T_{n,p} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} - 1}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = -1$$

Sinon, on obtient par une factorisation d'angle moitié

$$T_{n,p} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} + 1}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = \frac{2 \cos\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}{-2i \sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}$$

On conclut

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad S_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p \in 2(n+1)\mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } p \in 2\mathbb{Z} \setminus 2(n+1)\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 19 (***)

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_i = |z_i| e^{i\theta}$$

Corrigé : On procède par récurrence sur n . Le résultat est trivial pour $n = 1$. Montrons le cas $n = 2$. Si l'un des deux complexes est nul, le résultat est immédiat. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Si On a

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

On considère l'écriture trigonométrique $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ avec θ_1, θ_2 réels. Il vient

$$2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 2 |z_1 z_2| \operatorname{Re} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 2 |z_1 z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 2 |z_1 z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, c'est-à-dire $\theta_2 \equiv \theta_1 [2\pi]$. Le résultat suit. On suppose le résultat vrai au rang n entier non nul fixé. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On pose $Z = \sum_{i=1}^n z_i$. Il vient d'après le cas pour deux nombres complexes et l'hypothèse de récurrence

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \right| = |Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Puis, si l'inégalité est une égalité, on en déduit notamment $\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| = \sum_{i=1}^n |z_i|$ d'où l'existence de θ réel tel que $z_i = |z_i| e^{i\theta}$ puis $Z = e^{i\theta} \sum_{i=1}^n |z_i|$ et d'après le cas d'égalité pour deux complexes, il vient $z_{n+1} = |z_{n+1}| e^{i\theta}$ ce qui clôt la récurrence.

L'inégalité triangulaire avec cas d'égalité est démontrée.

Exercice 20 (*)

Calculer $\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, dt$

Corrigé : En intégrant par partie, on trouve

$$\int^x \operatorname{Arctan} t \, dt = [x \operatorname{Arctan} x] - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \operatorname{Arctan} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 21 (**)

Primitive de $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$

Corrigé : On a $\int^x \sqrt{2t - t^2} \, dt = \int^x \sqrt{1 - (t-1)^2} \, dt$

On pose $t - 1 = \sin u$ et il vient

$$\begin{aligned} \int^x \sqrt{1 - (t-1)^2} \, dx &= \int^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \cos^2 u \, du \\ &= \int^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \frac{1 + \cos(2u)}{2} \, du = \left(\frac{u + \sin u \cos u}{2} \right)^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \end{aligned}$$

De la trigonométrie permet d'obtenir $\cos \operatorname{Arcsin}(x-1) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ d'où

$$\int^x \sqrt{2t - t^2} \, dt = \frac{1}{2} [\operatorname{Arcsin}(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}]$$

Exercice 22 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

1. Montrer
$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

2. Établir
$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

3. En déduire
$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$$

Corrigé : Soit $x > 1$ et $y > 1$. Le changement de variable $u = 1 - t$ de classe \mathcal{C}^1 donne

$$\beta(x, y) = - \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du$$

Autrement dit
$$\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x, y) = \beta(y, x)}$$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \frac{-1}{y}(1-t)^y$ sont de classe \mathcal{C}^1 d'où, par intégration par parties,

$$\beta(x+1, y) = \underbrace{\left[\frac{-1}{y} t^x (1-t)^y \right]_0^1}_{=0} + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$$

d'où
$$\forall x > 1, y > 1 \quad y\beta(x+1, y) = x\beta(x, y+1)$$

Par suite
$$(x+y)\beta(x+1, y) = x[\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)]$$

$$= x \int_0^1 [t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y] dt$$

$$(x+y)\beta(x+1, y) = x \int_0^1 (1+t-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = x\beta(x, y)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)}$$

D'après la relation précédemment établie et la symétrie de β , on a

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(y+1, x) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y} \beta(y, x)$$

On conclut
$$\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)}$$

Exercice 23 (*)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f, g fonctions majorées de I dans \mathbb{R} telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer

$$\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$$

Corrigé : On a
$$\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$$

et par conséquent

$$\boxed{\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)}$$

Exercice 24 (**)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On définit $d(x, A) = \inf \{|x - a|, a \in A\}$. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

Corrigé : Soit $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$$

La borne inférieure $d(x, A)$ minore $|x - a|$ d'où

$$d(x, A) \leq |x - y| + |y - a|$$

autrement dit

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|$$

Cette minoration vaut pour tout $a \in A$ ce qui signifie que $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - a|, a \in A\}$ et comme la borne inférieure de cet ensemble est le plus grand des minorants, il vient

$$d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$$

d'où

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|}$$

Exercice 25 (***)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f fonction majorée de I dans \mathbb{R} et $\lambda \geq 0$. Montrer

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Corrigé : Soit $x \in I$. On a

$$\lambda f(x) \leq \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

puis

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) \leq \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Elle est immédiate si $\lambda = 0$. Supposons $\lambda > 0$. Il vient, en appliquant l'inégalité précédemment obtenue

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{\lambda} \lambda f(x) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in I} \lambda f(x)$$

d'où

$$\lambda \sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} \lambda f(x)$$

On conclut

$$\boxed{\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)}$$

Exercice 26 (*)

Résoudre $\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x)$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Corrigé : L'espace des solutions de l'équation homogène est clairement $\text{Vect}(\cos)$. Par variation de la constante, on obtient

$$\lambda'(x) \cos^2 x = \sin^2 x \iff \lambda'(x) = \tan^2 x \iff \lambda(x) = \tan x - x + \alpha$$

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\{x \mapsto \sin x - x \cos x + \alpha \cos x, \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 27 (*)

Résoudre $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1; 1 [$

Corrigé : La solution constante $x \mapsto 1$ est clairement une solution particulière. On trouve

$$\boxed{\{x \mapsto 1 + \lambda e^{-\text{Arcsin } x}, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 28 (*)

Soient u, v dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de λ , la forme des fonctions u et v .

Corrigé : 1. Comme $v \neq 0$, il existe y_0 réel tel que $v(y_0) \neq 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$$

Puis, comme $u \neq 0$, il existe x_0 réel tel que $u(x_0) \neq 0$ et par suite

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v''(x) + \mu v(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{u''(x_0)}{u(x_0)}$$

Enfin, en évaluant la relation initiale en (x_0, y_0) , on obtient

$$\lambda + \mu = 0$$

On conclut

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad | \quad u'' + \lambda u = 0 \quad \text{et} \quad v'' - \lambda v = 0}$$

2. Il existe a, b, c, d réels tels que

| | | | |
|------------------|----------------------------|--|--|
| Si $\lambda = 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = a + bt$ | $v(t) = c + dt$ |
| Si $\lambda > 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t)$ | $v(t) = ce^{\sqrt{\lambda}t} + de^{-\sqrt{\lambda}t}$ |
| Si $\lambda < 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{-\sqrt{-\lambda}t}$ | $v(t) = c \cos(\sqrt{-\lambda}t) + d \sin(\sqrt{-\lambda}t)$ |

Exercice 29 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x \tag{E}$$

Corrigé : Soit f solution de (E). On a $f'(x) = -f(-x) + e^x$ pour x réel d'où f' dérivable. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - f'(-x) = e^x$$

En substituant x par $-x$ dans la relation de départ, on a $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$ pour x réel d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(x) = 2 \operatorname{ch} x$$

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{ch} x + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Réciproquement, on injecte dans l'équation (E) et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)(\cos x - \sin x) = 0 \implies \alpha + \beta = 0$$

Finalement

$$\boxed{S_E = \{x \mapsto \operatorname{ch} x + \alpha(\cos x - \sin x), \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Remarque : La forme de S_E était en partie prévisible. En effet, il s'agit de résoudre une équation du type $\Phi(f) = \exp$ avec $\Phi : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(-x))$ et on peut établir, en suivant la même trame que dans la résolution ci-avant, que le noyau $\operatorname{Ker} \Phi$ est une droite vectorielle.

Exercice 30 (***)

Soit f dérivable sur \mathbb{R}_+ telle que

$$\forall x \geq 0 \quad |f'(x) + f(x)| \leq 1$$

Montrer

$$\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}$$

Corrigé : Notons $g = f' + f$ et considérons cette relation comme une équation différentielle. On en déduit après variation de la constante une expression de f en fonction de g avec

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \alpha e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) - e^{-x}f(0) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

et par inégalité triangulaire, en utilisant $|g(t)| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$

$$\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq e^{-x} \int_0^x e^t |g(t)| dt \leq e^{-x} \int_0^x e^t dt$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}}$$

Exercice 31 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+n^2}$ pour n entier.

Corrigé : On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{n+n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$

D'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty}$$

Exercice 32 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Corrigé : Pour n entier non nul, on a $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \leq n \ln n$ et par croissances comparées, on conclut

$$\boxed{\frac{\ln(n!)}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Exercice 33 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + bn \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Corrigé : Si $a = 0$, le résultat est immédiat. Si $b = 0$, le résultat est immédiat aussi avec $u_n = a^n u_0$ pour tout n entier. Considérons a et b non nuls et posons $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n entier. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= u_{n+1} - u_n = au_n + bn - (au_{n-1} + b(n-1)) \\ &= a(u_n - u_{n-1}) + b = av_{n-1} + b \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est arithmético-géométrique. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] = u_n - u_0$$

donc expliciter la suite $(v_n)_n$ permet d'expliquer la suite $(u_n)_n$. Si $a = 1$, on a $v_n = v_0 + nb = nb$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} kb$$

D'où

$$\text{Si } a = 1, \text{ on a } u_n = u_0 + b \frac{n(n-1)}{2} \text{ pour tout } n \text{ entier.}$$

Si $a \neq 1$, on a $v_n = \alpha + a^n(v_0 - \alpha)$ avec $\alpha = \frac{b}{1-a}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha + a^k(v_0 - \alpha)] = n\alpha + \frac{1-a^n}{1-a}(v_0 - \alpha)$$

et $v_0 = u_1 - u_0 = (a-1)u_0 + b$. Ainsi

$$\text{Si } a \neq 1, \text{ on a } u_n = u_0 + n\alpha + a^n \left(u_0 - \frac{a\alpha}{a-1} \right) \text{ pour tout } n \text{ entier.}$$

Exercice 34 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Corrigé : Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, on trouve

$$\forall n \geq 2 \quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq 0$$

et
$$\forall n \geq 1 \quad v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \geq 0$$

et
$$\forall n \geq 1 \quad u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, on conclut que

$$\text{Les suites } (u_n)_{n \geq 1} \text{ et } (v_n)_{n \geq 1} \text{ sont adjacentes donc convergentes vers une même limite.}$$

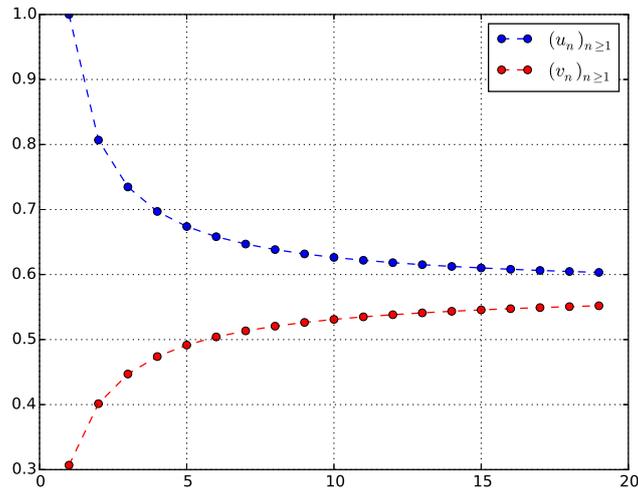


FIGURE 1 – Tracé des $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$

Exercice 35 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour n entier.

Corrigé : Par récurrence immédiate, on a $u_n > 0$ pour tout n entier. On a $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x \geq 0$ par concavité d'où $u_{n+1} \leq u_n$ pour n entier donc la suite $(u_n)_n$ décroît et est minorée donc convergente par limite monotone. Comme $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(1 + x)$ est continue sur l'intervalle fermé \mathbb{R}_+ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est nécessairement point fixe de f et on a $f(x) = x \iff x = 0$. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

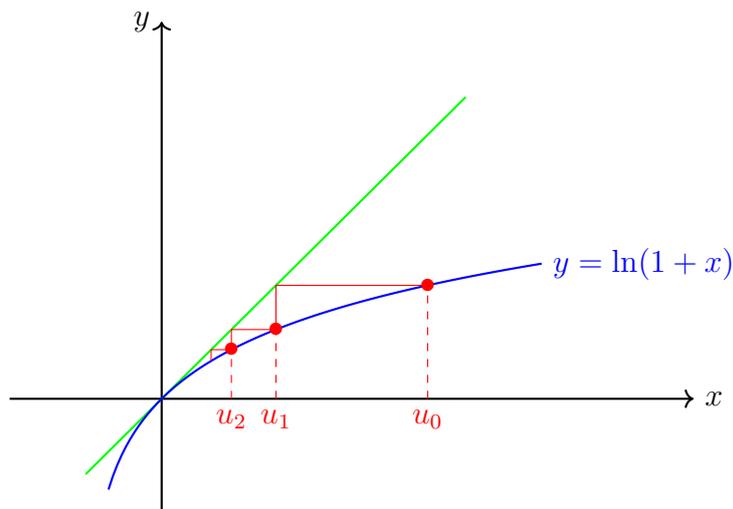


FIGURE 2 – Graphe de la suite $(u_n)_n$

Exercice 36 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists! x_n \geq 0 \quad f_n(x_n) = 0$

2. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \frac{1}{2}$

3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de fonctions strictement croissantes et $f_n(0) = -1$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où f_n réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $[-1; +\infty[$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \exists! x_n \geq 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad x_n \geq \frac{1}{2}}$$

3. Soit n entier non nul. On a clairement $f_n \leq f_{n+1}$ d'où

$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n)$$

Par croissance stricte de f_{n+1} , il s'ensuit que $x_{n+1} \leq x_n$ autrement dit

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ décroît.}}$$

Par théorème de convergence monotone, il s'ensuit que $(x_n)_n$ converge.

On a $f_2(x) = -1 + x + x^2$ donc l'unique racine positive est $\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ d'où $x_n \leq \varphi$ pour tout $n \geq 2$ puis

$$f_n(x_n) = 0 \iff -1 + \sum_{k=1}^n x_n^k = 0 \iff -1 + x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} = 0 \iff x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_n^{n+1}}{2}$$

Comme $0 \leq x_n \leq \varphi < 1$ pour tout $n \geq 2$, il s'ensuit

$$\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}}$$

Remarque : En montrant que $(x_n)_{n \geq 1}$ décroît strictement puisque $f_n < f_{n+1}$ sur $]0; +\infty[$ pour tout n entier non nul, on a $x_n < x_1 = 1$ pour tout $n \geq 2$ ce qui évite de résoudre $f_2(x) = 0$.

Exercice 37 (***)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans \mathbb{U} deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans \mathbb{C}^* . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Corrigé : Supposons $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. On a pour n entier

$$\forall k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket \quad u_{n+k} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^k \times \lambda_i^n$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_r \\ \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \dots & \alpha_r \lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \alpha_r \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

Chaque λ_k^n est combinaison linéaire de suites de limites nulles puisque $u_{n+k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$ et il s'ensuit

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \lambda_k^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_k \in \mathbb{U}$ pour tout $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On conclut

$$\boxed{u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Exercice 38 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Corrigé : On appelle *extractrice* une injection strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . La suite $(z^n)_n$ est à valeurs dans \mathbb{U} partie bornée de \mathbb{C} . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de φ extractrice telle que $(z^{\varphi(n)})_n$ converge et par continuité du module, on a

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \text{ réel}$$

On définit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n) + 1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1) + \psi(n)}_{\geq 1} > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ avec $(\psi(n))_n$ sous-suite de $(\varphi(n))_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1) - \psi(n)} = z^{\psi(n+1)} \overline{z^{\psi(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (z^n)_n \text{ admet une suite extraite qui tend vers 1.}}$$

Exercice 39 (**)

Soit la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2 .
2. En déduire que $I_n + J$ est inversible et préciser son inverse.

Corrigé : 1. On trouve

$$\boxed{J^2 = nJ}$$

2. On note $A = I_n + J$ d'où $J = A - I_n$. On a

$$A^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + (n+2)J = I_n + (n+2)(A - I_n) \iff A^2 - (n+2)A = (n+1)I_n$$

On conclut

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = \frac{1}{n+1}(A - (n+2)I_n).}$$

Exercice 40 (**)

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = XY^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Corrigé : Par associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = X(Y^\top X)Y^\top = \alpha M \quad \text{avec} \quad \alpha = Y^\top X = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Par récurrence immédiate, on conclut

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad M^p = \alpha^{p-1}M}$$

Exercice 41 (**)

Soit $V = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Corrigé : Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$. On a

$$(V\bar{V})_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(\ell-1)} = \sum_{j=1}^{n+1} (\omega^{k-\ell})^{j-1}$$

C'est une somme de racines de l'unité et en distinguant les cas, on trouve

$$(V\bar{V})_{k,\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k = \ell \\ \frac{1 - \omega^{(n+1)(k-\ell)}}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut

$$\boxed{V\bar{V} = (n+1)I_{n+1}}$$

Exercice 42 (*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } M = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } X \text{ et } Y \text{ des matrices colonnes non nulles telles que } M = XY^\top.}$$

Exercice 43 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $M^p = 0$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corrigé : On suppose $A = I_n$. Soit p entier non nul tel que $B^p = 0$. D'après la factorisation de Bernoulli, on a

$$I_n = I_n^p - (-B)^p = (I_n + B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k$$

ce qui prouve l'inversibilité de $I_n + B$. Supposons $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a

$$A + B = A(I_n + B') \quad \text{avec} \quad B' = A^{-1}B$$

On a $AB = BA$ d'où $A^{-1}B = BA^{-1}$ et il s'ensuit $(A^{-1}B)^p = A^{-p}B^p = 0$. Ainsi, d'après le premier résultat, on a $I_n + B' \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Supposons $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après le sens direct, on a $A = A + B + (-B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 44 (**)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

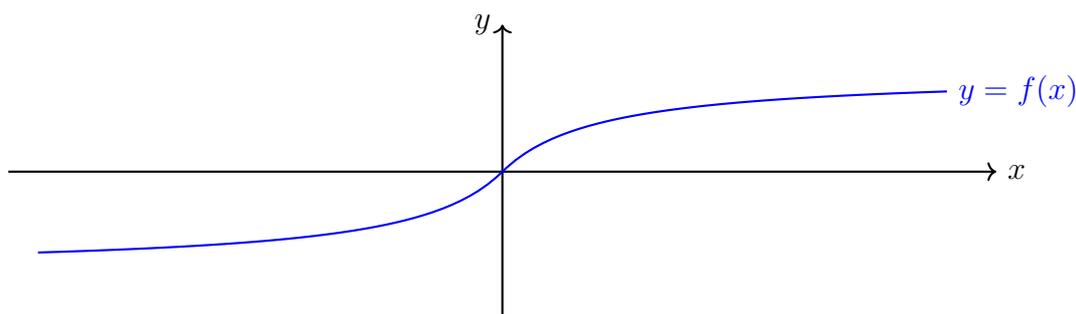
1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 1 [$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1} .

Corrigé : 1. Pour x réel, on a clairement $|f(x)| < 1$. Puis

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0 \quad f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que f croît strictement sur \mathbb{R} avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }] -1 ; 1 [.}$$



2. Soit x réel et $y \in] -1 ; 1 [$. On résout

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1 + |x|} \iff \begin{cases} x = (1 + |x|)y \\ |x|(1 - |y|) = |y| \end{cases} \iff x = \frac{y}{1 - |y|}$$

$$\boxed{\forall y \in] -1 ; 1 [\quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}}$$

Exercice 45 (***)

Soit $f : E \rightarrow F$. On a

$$f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Corrigé : Montrons le sens indirect. Pour $A = \emptyset$, on obtient $f(E) = F$ d'où f surjective. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$. On a $f(y) \in f(E \setminus \{x\}) = F \setminus \{f(x)\}$ d'où $f(y) \neq f(x)$. Supposons f bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $y \in f(E \setminus A)$. On a $y = f(x)$ avec $x \notin A$. Si $f(x) \in f(A)$, alors $f(x) = f(a)$ avec $a \in A$ et l'injectivité de f implique $x = a \in A$ ce qui est exclu. Par suite, on a $f(x) \in F \setminus f(A)$. Soit $f \in F \setminus f(A)$. Par surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \notin f(A)$, il s'ensuit que $x \notin A$ d'où $x \in f(E \setminus A)$. On conclut

$$\boxed{f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)}$$

Exercice 46 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .
2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que π est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de π .

Corrigé : 1. Les entiers $m+n$ et $m+n+1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est bien définie de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.$$

Variante : On observe que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a $\pi(0, 0) = 0$ d'où $0 \in \text{Im } \pi$. On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on observe

$$\pi(m, n) + 1 = \begin{cases} \pi(n+1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\pi(m, n) + 1 \in \text{Im } \pi$. Ainsi, l'ensemble $\text{Im } \pi$ est une partie de \mathbb{N} contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$$\boxed{\text{Im } \pi = \mathbb{N}}$$

3. Soient (m, n) et (m', n') dans \mathbb{N}^2 avec $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m' + n' \geq m + n + 1$, il vient

$$\begin{aligned} \pi(m', n') &= \frac{(m' + n')(m' + n' + 1)}{2} + n' \geq \frac{(m + n + 1)(m' + n' + 1)}{2} + n' \\ &\geq \frac{(m + n)(m' + n' + 1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m, n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $m' + n' > m + n \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m + n \neq m' + n' \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Supposons $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m + n = m' + n'$, alors $n \neq n'$ d'où $\pi(m, n) \neq \pi(m', n')$ et sinon on a également $\pi(m', n') \neq \pi(m, n)$ d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m, n) \neq (m', n') \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Ainsi

L'application π est une injection de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .

Variante : Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m', n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geq n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m + 1 + n' + n + \sum_{k=1}^{m+n} k = m + 1 + n' + \pi(m, n)$$

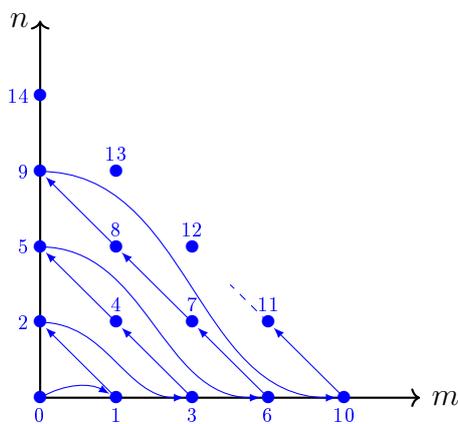


FIGURE 3 – Parcours de \mathbb{N}^2 par π

Exercice 47 (*)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Corrigé : Soit n entier. On a

$$2^{3n+5} + 3^{n+1} \equiv 2^5(2^3)^n + 3^{n+1} \equiv 2 \times 3^n + 3 \times 3^n \equiv 0 \pmod{5}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$$

Exercice 48 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Corrigé : Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d|k} 1 \right)$$

Comme les sommes sont finies, on peut intervertir l'ordre de sommation. Le plus grand diviseur de n étant n lui-même, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left(\sum_{k \in [1; n], d|k} 1 \right)$$

La somme intérieure ci-dessus compte le nombre de multiples de d dans $[1; n]$ qui sont

$$d, 2d, \dots, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}$$

Exercice 49 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Corrigé : Supposons $p = q\ell$ avec q et ℓ des entiers ≥ 2 . D'après l'identité de Bernoulli, il vient

$$a^p - 1 = (a^q)^\ell - 1 = (a^q - 1) \sum_{k=0}^{\ell-1} a^{qk}$$

ce qui contredit la primalité de $a^p - 1$. on en déduit que p est premier. Puis, on factorise

$$a^p - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{p-1} a^k$$

On a $a - 1 < a^p - 1$ et comme $a^p - 1$ est premier, il s'ensuit $a - 1 = 1$ et on conclut

$$\boxed{a^p - 1 \text{ premier} \implies a = 2 \text{ et } p \text{ premier}}$$

Remarque : Les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ sont appelés *nombres premiers de Mersenne*.

Exercice 50 (**)

Soient a, b dans \mathbb{Z} . Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Corrigé : L'égalité a clairement lieu si a ou b est nul. On suppose a et b non nuls. On note $d = a \wedge b$. On dispose de a', b' dans \mathbb{Z} , premiers entre eux tels que $a = a'd, b = b'd$ avec $a' \wedge b' = 1$. On pose $c = a'b'd$. On a $a|c$ et $b|c$ d'où $a \vee b|c$. Puis, on dispose de k, ℓ dans \mathbb{Z} tels que

$$a \vee b = ak = a'dk \quad \text{et} \quad a \vee b = b\ell = b'd\ell$$

et de u et v dans \mathbb{Z} tels que $a'u + b'v = 1$. Ainsi, il vient

$$a \vee b = (a \vee b)(a'u + b'v) = b'd\ell a'u + a'dkb'v = c(\ell u + kv)$$

ce qui prouve $c|a \vee b$. Par conséquent, les entiers $a \vee b$ et c sont associés et unitaires donc égaux.

Ainsi, on obtient

$$(a \wedge b)(a \vee b) = dc = da'b'd$$

On conclut

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a \wedge b)(a \vee b) = ab}$$

Exercice 51 (*)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\operatorname{Arctan} x} - \frac{2x}{\pi}$

Corrigé : Soit $x > 0$. On a

$$\frac{x}{\operatorname{Arctan} x} - \frac{2x}{\pi} = x \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}{\frac{\pi}{2} \operatorname{Arctan} x} = \frac{x \operatorname{Arctan} (1/x)}{\frac{\pi}{2} \operatorname{Arctan} x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\pi/2)^2}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{x}{\operatorname{Arctan} x} - \frac{2x}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi^2}}$$

Exercice 52 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a \cos t + b \sin t$ ait une limite en $+\infty$.

Corrigé : Soient a, b réels non tous nuls et t réel. On a

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} [\alpha \cos t + \beta \sin t] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe θ réel tel que $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$. Ainsi

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \theta)$$

Si a, b sont non tous nuls, avec l'expression précédemment obtenue, comme la fonction \cos n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f non plus. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet une limite en } +\infty \text{ si et seulement si } a = b = 0.}$$

Exercice 53 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Corrigé : Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\ln x + \ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right] \\ &= (\ln x)(1-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right) \end{aligned}$$

$$\text{On conclut } \boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1)}$$

Exercice 54 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Corrigé : Par récurrence immédiate, on montre

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et par continuité de f en zéro $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0)}$

Exercice 55 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

$$2. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$$

Corrigé : 1. Notons $a = f(0)$. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - a| = |x|$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} car 1-lipschitzienne d'où $x \mapsto |f(x) - a|$ de signe constant sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- . Par conséquent, la fonction $f - a$ est soit id, soit $-id$, soit $x \mapsto |x|$, soit $x \mapsto -|x|$. La condition sur f impose que celle-ci soit injective et donc $f - a$ également. Ainsi,

$$f = a + id \quad \text{ou} \quad f = a - id \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont clairement solutions.

$\boxed{\text{Les fonctions solutions sont de la forme } a + id \text{ ou } a - id \text{ avec } a \text{ réel.}}$

2. Pour $y = -x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) + f(-x)| = 0$

Ainsi, la fonction f est impaire et par suite, en prenant $-y$ pour y , il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(-y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

La fonction f est donc solution de l'équation de la première question. Comme f est impaire, on a également $f(0) = 0$ d'où $f = id$ ou $-id$. Réciproquement, de telles fonctions sont solutions.

Ainsi $\boxed{\text{Les fonctions solutions sont } id \text{ et } -id.}$

Exercice 56 (***)

On pose $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[0; 1]$.

2. La fonction $g : x \in [0; 1] \mapsto [f(x)]$ est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?

Corrigé : 1. La fonction f est continue sur $]0; 1]$ comme composée de telles fonctions et on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)O(1) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$$

Ainsi $\boxed{f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})}$

2. La fonction g est bien définie sur $[0; 1]$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{(2k+1)\pi}; \frac{1}{2k\pi} \right] \\ -1 & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2(k+1)\pi}; \frac{1}{(2k+1)\pi} \right[\end{cases}$$

Ainsi, la fonction g admet une infinité de discontinuités sur le segment $[0; 1]$.

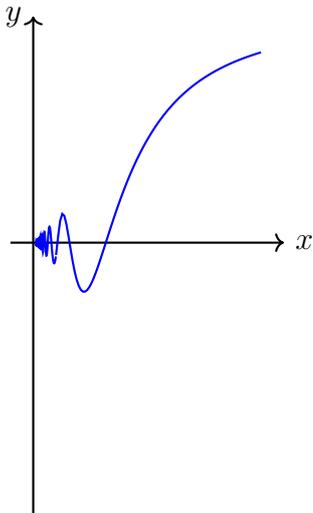


FIGURE 4 – Graphe $y = f(x)$

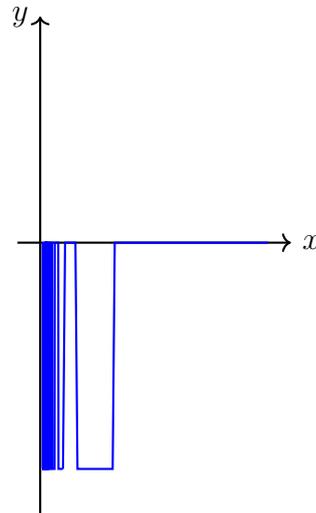


FIGURE 5 – Graphe $y = g(x)$

Il n'existe donc pas de subdivision de $[0; 1]$ adaptée à g et on conclut

$$g \notin \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{R})$$

Remarque : Cet exemple illustre le fait que la composée d'une fonction continue par morceaux avec une fonction continue n'est pas nécessairement continue par morceaux.

Exercice 57 (*)

Soit (G, \times) un groupe et $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G . Montrer

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$$

Corrigé : Soit $x \in Z(G)$ et $y \in G$. Par surjectivité de φ , il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g)$ d'où

$$\varphi(x)y = \varphi(x)\varphi(g) = \varphi(xg) = \varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = y\varphi(x)$$

Autrement dit $\forall x \in Z(G) \quad \varphi(x) \in Z(G)$

Ainsi $\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$

Exercice 58 (**)

Soit (G, \star) un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de G est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Corrigé : 1. Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes. Supposons qu'il existe $a \in H_1 \setminus H_2$. Soit $b \in H_2$. On a $a \star b \in H_1 \cup H_2$, autrement dit $a \star b \in H_1$ ou $a \star b \in H_2$. Si $a \star b \in H_2$, alors $(a \star b) \star b^{-1} = a \in H_2$ ce qui est exclu. Il s'ensuit que $a \star b \in H_1$ et par suite $a^{-1} \star (a \star b) = b \in H_1$ ce qui prouve $H_2 \subset H_1$. Si un tel a n'existe pas, alors $H_1 \subset H_2$. On conclut

Une union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.

2. En fait, non ! On a pour la loi multiplicative

$$(\pm 1, \pm 1) = (\pm 1, 1) \cup (1, \pm 1) \cup \pm(1, 1)$$

et aucun des sous-groupes exhibés ne contient les autres. Ainsi

Le résultat ne se généralise pas à plus de deux sous-groupes.

Remarques : (a) Si on connaît les groupes quotients, on peut considérer :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle (1, 0) \rangle \cup \langle (0, 1) \rangle \cup \langle (1, 1) \rangle$$

(b) Il faut chercher un contre-exemple de groupe qui ne soit pas cyclique car un sous-groupe contenant un générateur serait le groupe lui-même.

Exercice 59 (**)

On note $A = \left\{ \frac{m}{2^n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $U(A)$.

Corrigé : 1. On a $1 = \frac{1}{2^0} \in \mathbb{D}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{D}^2$, on a $x = \frac{p}{2^n}$ et $y = \frac{q}{2^m}$ avec $(p, q, n, m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$ puis

$$x - y = \frac{p}{2^n} - \frac{q}{2^m} = \frac{2^m p - 2^n q}{2^{n+m}} \in A \quad \text{et} \quad xy = \frac{p}{2^n} \frac{q}{2^m} = \frac{pq}{2^{n+m}} \in A$$

Ainsi

L'ensemble A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

2. Un élément de $U(A)$ s'écrit $\frac{p}{2^n}$ et il existe q et m entiers tels que $\frac{pq}{2^{n+m}} = 1$. Ainsi, on a $pq = 2^{n+m}$ d'où $p|2^{n+m}$ et par conséquent

$$U(A) \subset \{(-1)^\varepsilon 2^r, (\varepsilon, r) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}\}$$

L'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$U(A) = \{(-1)^\varepsilon 2^r, (\varepsilon, r) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}\}$$

Exercice 60 (*)

En considérant la dérivée n -ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Corrigé : Notons $f(x) = x^n$ pour x réel. Une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in [0; n] \quad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Par dérivation en considérant directement f^2 puis $f \times f$ avec la formule de Leibniz, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f^2)^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad \text{et} \quad (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f^2)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Par identification

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Remarque : C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde.

Exercice 61 (**)

Déterminer
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k + (-1)^k}{n^3} \right)$$

Corrigé : D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin u| \leq |u|$ pour u réel. Ainsi, conjuguée avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k + (-1)^k}{n^3} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sin \left(\frac{k + (-1)^k}{n^3} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n^3} \leq \frac{n(n+1)}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k + (-1)^k}{n^3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 62 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$ pour n entier.

Corrigé : Posons $f(x) = \frac{1}{2+x}$ pour $x \geq 0$. On a $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ d'où $u_n \geq 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \implies \sup_{x \geq 0} |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k -contractante avec $k \in]0; 1[$. On a pour $x \geq 0$

$$f(x) = x \iff x^2 + 2x = 1 \iff (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2} - 1$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq k^n \left| u_0 - (\sqrt{2} - 1) \right|$$

On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} - 1}$$

Remarque : La fonction f décroît donc on peut aussi considérer les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui sont monotones et vérifier leur convergence.

Exercice 63 (*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Corrigé : Notons $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ les racines de P . D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ (on a $n-1 \geq 1$) et par suite

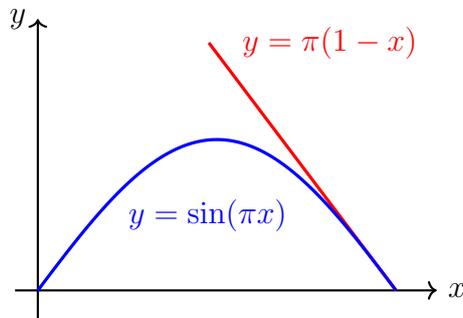
$$\boxed{\text{Le polynôme } P' \text{ est scindé à racines simples.}}$$

Exercice 64 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

Corrigé : La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[0; 1]$ puisqu'elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \pi \cos(\pi x)$ décroissante sur $[0; 1]$. Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)}$$



Exercice 65 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Corrigé : La fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave sur \mathbb{R}_+ . D'après l'inégalité de Jensen, il vient

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

On conclut

$$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$$

Exercice 66 (**)

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ réels positifs, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

Corrigé : 1. Soient $a, b > 0$. Par concavité de \ln , on a

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right)$$

D'où

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}}$$

Remarque : L'inégalité est trivialement vraie si a ou b est nul.

2. Si les a_k ou les b_k sont tous nuls, le résultat est trivial. On suppose les a_k et les b_k non tous nuls. On pose

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_k = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \quad \beta_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

D'après le résultat de la première question, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sqrt[p]{\alpha_k} \sqrt[q]{\beta_k} \leq \frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{q}$$

Par sommation, il vient
$$\sum_{k=1}^n \sqrt[p]{\alpha_k} \sqrt[q]{\beta_k} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}}$$

Exercice 67 (**)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Corrigé : 1. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a

$$P \circ P - P = \sum_{k=0}^n a_k (P - X + X)^k - P = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} - P$$

puis
$$\begin{aligned} P \circ P - P &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} + \sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{0} (P - X)^0 X^k - P \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - P}$$

Variante : On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a

$$P \circ P - P = \sum_{k=0}^n a_k [P^k - X^k] = \sum_{k=0}^n a_k (P - X) \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-i}$$

2. On a

$$P \circ P - X = P \circ P - P + P - X$$

D'après le résultat précédent, on conclut

$$\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - X}$$

Exercice 68 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt[3]{x}$$

Corrigé : Notons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X . On a $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On choisit alors $P = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} L_i$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} L_i(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} \delta_{i,j} = \sqrt[3]{x_j}$$

Exercice 69 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta) \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Corrigé : Soit n entier et θ réel. On a

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} (e^{i\theta})^n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos^2 \theta - 1)^k (\cos \theta)^{n-2k}$$

On conclut

$$\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

Remarque : Les polynômes $(T_n)_n$ sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

Exercice 70 (**)

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos \theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n .

Corrigé :

1. Le calcul donne

$$P_2 = X^2 - 2 \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 - 3X$$

2. On peut aisément conjecturer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Montrons cette propriété par récurrence double. Notons :

$$\mathcal{P}(n) : \quad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

- Les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont clairement vraies.
- $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$: On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour n entier non nul fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= XP_{n+1} - P_n = X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - P_n \\ &= X^{n+2} + Q_{n+2} \end{aligned}$$

avec

$$Q_{n+2} = XQ_{n+1} - P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

3. On procède là encore par récurrence double. Notons

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

- La vérification de $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ est immédiate.
- $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$: On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour n entier fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2}(z + 1/z) &= (z + 1/z)P_{n+1}(z + 1/z) - P_n(z + 1/z) \\ &= (z + 1/z)(z^{n+1} + 1/z^{n+1}) - (z^n + 1/z^n) = z^{n+2} + 1/z^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent

$$\boxed{\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \quad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'identité d'Euler, on a $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. Par suite, il vient

$$P_n(2 \cos \theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)}$$

5. A l'aide de la question précédente, déterminons les racines de P_n . Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$P_n(2 \cos \theta) = 0 \iff 2 \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

L'application $\theta \mapsto 2 \cos \theta$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ donc injective sur cet intervalle.

Comme on a $0 < \frac{\pi}{2n}$ et $\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$

on en déduit $\text{Card} \left\{ 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right\}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = n$

Comme P_n est un polynôme de degré n , il admet au plus n racines et on a donc déterminé exactement toutes ses racines. Le coefficient dominant de P_n étant égal à 1, on en déduit la forme factorisée

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X) = \prod_{k=1}^n \left(X - 2 \cos \left[\pi \left(\frac{2k-1}{2n} \right) \right] \right)}$$

Exercice 71 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Corrigé : Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(e^{i\theta}) \overline{P(e^{i\theta})} = 1$$

On pose
$$\widehat{P} = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} X^k$$

On a $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \widehat{P}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} e^{ik\theta} = e^{in\theta} \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} e^{-i(n-k)\theta} = e^{in\theta} \overline{P(e^{i\theta})}$

Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (P\widehat{P})(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$

ce qui prouve que le polynôme $P\widehat{P} - X^n$ admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. On en déduit que P divise X^n et comme $n = \deg P$, il vient $P = \alpha X^n$ avec $\alpha = P(1) \in \mathbb{U}$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}\} = \{\alpha X^n, (\alpha, n) \in \mathbb{U} \times \mathbb{N}\}}$$

Exercice 72 (*)

Soit n entier non nul, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $H = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que $E = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse. Soit $M \in E$. Supposons qu'il existe $A \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $M = A + \alpha I_n$. Il s'ensuit $\text{Tr} M = n\alpha$ d'où

$$\alpha = \frac{\text{Tr} M}{n} \quad \text{et} \quad A = M - \frac{\text{Tr} M}{n} I_n$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. On vérifie sans difficulté que cette solution convient et on conclut

$$\boxed{E = H \oplus \text{Vect}(I_n)}$$

Exercice 73 (**)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E .

Corrigé : Soient des réels strictement ordonnés $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\lambda_i} = 0$. Supposons les α_i non tous nuls. On pose $k = \max\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \alpha_i \neq 0\}$. On a

$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_{\lambda_i}$ avec $\alpha_k \neq 0$. Par factorisation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 = \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e^{(\lambda_i - \lambda_k)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \alpha_k = 0$$

ce qui est contradictoire. On en déduit que les α_i sont tous nuls autrement dit

$$\boxed{\text{La famille } (f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ est libre.}}$$

Exercice 74 (***)

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \dots, a_i^n)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card}\{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Corrigé : Si $\text{Card}\{a_0, \dots, a_n\} < n + 1$, alors il existe $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ et par suite $u_i = u_j$ ce qui implique (u_0, \dots, u_n) liée, autrement dit, par contraposée

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \implies \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Supposons $\text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i u_i = 0$, autrement dit

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^k = 0$$

Ainsi pour $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il vient par combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^k = 0 \iff \sum_{i=0}^n \lambda_i \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k a_i^k \right) = 0$$

Notant $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$, les α_k étant quelconques, on a donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i) = 0$$

En considérant $P = L_k$ le k -ième polynôme interpolateur de Lagrange associé à (a_0, \dots, a_n) , on trouve exactement

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \underbrace{L_k(a_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_k = 0$$

La liberté s'ensuit et on conclut

$$\boxed{(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1}$$

Exercice 75 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Corrigé : Notons N le nombre de couples de $\mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1. Il y a n façons de choisir un élément a en particulier puis $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les éléments de $X \setminus \{a\}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $\binom{n-1-k}{\ell}$ façons de choisir les éléments de $Y \setminus X$ avec $\ell \in \llbracket 0; n-1-k \rrbracket$. Ainsi, on a

$$\boxed{N = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1-k} n \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{\ell} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} = n 3^{n-1}}$$

Variante : Une autre approche consiste à choisir un élément a en particulier (n façons de faire ce choix), puis pour chacun des $n-1$ autres éléments, on le place soit dans $X \setminus \{a\}$, soit dans $Y \setminus \{a\}$, soit hors de $X \cup Y$. On a donc 3^{n-1} choix possibles de $(X \cup Y) \setminus \{a\}$.

Exercice 76 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1, \dots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Corrigé : On considère les tiroirs $\{1, 20\}, \{2, 19\}, \dots, \{10, 11\}$. On tire 11 nombres (les chaussettes) à placer dans ces 10 tiroirs. Il y a alors au moins un tiroir qui contient 2 chaussettes, autrement dit

$$\boxed{\text{Il y a au moins deux nombres dont la somme vaut 21.}}$$

Exercice 77 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par convention, on pose $\llbracket 1; 0 \rrbracket = \emptyset$.

1. Préciser $\text{Card } \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket}$.

2. Pour p et n entiers, établir
$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

3. Soit n entier et u_0, \dots, u_n des réels. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell$$

4. En déduire une formule donnant $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Corrigé : 1. On a

$$\boxed{\text{Card } \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket} = n^p}$$

2. Choisir une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ puis les k éléments de l'image avec $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix. Notant $\mathcal{S}(E, F)$ les surjections de E sur F , on a

$$\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket} = \bigsqcup_{k=0}^n \bigsqcup_{Y \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card } Y=k} \mathcal{S}(\llbracket 1; p \rrbracket, Y)$$

On a $\text{Card } \mathcal{S}(\llbracket 1; p \rrbracket, Y) = S_{p,k}$ pour Y partie de $\llbracket 1; n \rrbracket$ à k éléments et on trouve

$$\text{Card } \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket} = \sum_{k=0}^n \sum_{Y \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card } Y=k} S_{p,k}$$

Ainsi

$$\boxed{n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell &= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)! \ell! (k-\ell)!} u_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{k=\ell}^n \frac{(n-\ell)!}{(n-k)! (k-\ell)!} (-1)^{n-k} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^{n-\ell-j} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell (1-1)^{n-\ell} \end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell = u_n}$$

Remarque : Ce procédé s'appelle *inversion de Pascal*.

4. Soient p et n entiers. Avec le résultat des questions précédentes, il vient

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \underbrace{\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} S_{p,\ell}}_{=k^p}$$

On conclut

$$\boxed{\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

Exercice 78 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Corrigé : Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_E$. On suppose les α_i non tous nuls. On pose $\ell = \min \{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_i \neq 0\}$. Il vient

$$u^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) \right) = u^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) \right) \alpha_\ell u^{n-1}(x_0) = 0$$

d'où la nullité de α_ℓ ce qui est absurde. On conclut

Il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre.

Exercice 79 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}$.

1. Montrer
$$E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$$

2. Montrer

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$$

Corrigé : 1. On procède par analyse/synthèse.

• Analyse : On suppose
$$E = \text{Ker}(f - \text{id}) + \text{Im}(f - \text{id})$$

Soit $x \in E$. Il existe $(a, b) \in \text{Ker}(f - \text{id}) \times E$ tel que $x = a + (f - \text{id})(b)$. En appliquant successivement f deux fois à cette relation, on obtient

$$\begin{cases} x = a + f(b) - b \\ f(x) = a + f^2(b) - f(b) \\ f^2(x) = a + b - f^2(b) \end{cases}$$

En additionnant les lignes, il vient

$$a = \frac{1}{3} [x + f(x) + f^2(x)] \quad \text{et} \quad f(b) - b = x - a = \frac{1}{3} [2x - f(x) - f^2(x)]$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

• Synthèse : Soit $x \in E$. On pose

$$a = \frac{1}{3} [\text{id} + f + f^2](x) \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{3} [2x - f(x) - f^2(x)]$$

On a clairement $a + c = x$. Puis, on observe la factorisation $X^3 - 1 = (X - 1)(1 + X + X^2)$ d'où

$$(f - \text{id}) \circ (\text{id} + f + f^2) = f^3 - \text{id} = 0 \quad \text{d'où} \quad a \in \text{Ker}(f - \text{id})$$

Reste à établir que $x \in \text{Im}(f - \text{id})$. On a

$$2 - X - X^2 = (X - 1)(-2 - X) \quad \text{d'où} \quad (2\text{id} - f - f^2) = (f - \text{id}) \circ (-2\text{id} - f)$$

puis
$$c = \frac{1}{3}(f - \text{id}) \circ (-2\text{id} - f)(x) \in \text{Im}(f - \text{id})$$

ce qui prouve l'existence. On conclut

$$\boxed{E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})}$$

2. Avec la factorisation $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X^2 + X + 1)(X - 1)$, il vient

$$(f - \text{id}) \circ (f^2 + f + \text{id}) = (f^2 + f + \text{id}) \circ (f - \text{id}) = f^3 - \text{id} = 0$$

d'où $\text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$

On a remarqué précédemment

$$(X - 1)(X + 2) = X^2 + X - 2 = X^2 + X + 1 - 3$$

d'où
$$1 = \frac{1}{3}(X + 2)(X - 1) + \frac{1}{3}(X^2 + X + 1)$$

et par conséquent
$$\text{id} = \frac{1}{3}(f + 2\text{id}) \circ (f - \text{id}) + \frac{1}{3}(f^2 + f + \text{id})$$

avec commutation dans le produit. On en déduit sans difficulté les inclusions réciproques à celles précédemment obtenues et on conclut

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})}$$

Exercice 80 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et p, q des projecteurs de E . Montrer que

$$p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q$$

Quand cette condition est réalisée, montrer

$$\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Corrigé : Raisonnons par équivalence. On a

$$(p - q)^2 = (p - q) \iff p^2 - q \circ p - p \circ q + q^2 = p - q \iff 2q = p \circ q + q \circ p$$

Clairement $p \circ q = q \circ p = q \implies 2q = p \circ q + q \circ p$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons $2q = p \circ q + q \circ p$. En composant cette relation par p à droite et de même à gauche, il vient

$$2q \circ p = p \circ q + p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad 2p \circ q = p \circ q \circ p + p \circ q$$

En soustrayant les deux égalités obtenues, on trouve $p \circ q = q \circ p$ et en injectant dans l'hypothèse $2q = p \circ q + q \circ p$, on trouve le résultat attendu. Ceci prouve

$$\boxed{p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q}$$

Montrons les égalités d'ensembles par double inclusion. Soit $x \in \text{Im}(p - q)$. On dispose de $t \in E$ tel que $x = (p - q)(t)$. Puis, on observe

$$x = p(t) - q(t) = p(t) - p \circ q(t) = p(t - q(t)) \in \text{Im } p$$

et
$$q(x) = q(p(t) - q(t)) = q \circ p(t) - q(t) = q(t) - q(t) = 0_E$$

D'où $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$. Comme $p - q$ est un projecteur, on a $\text{Im}(p - q) = \text{Ker}(\text{id} - (p - q))$ donc si $x \in \text{Im}(p - q)$, on devrait avoir $(p - q)(x) = x$. Comme $\text{Im } p = \text{Ker}(\text{id} - p)$, on a effectivement

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x) = p(x) = x \in \text{Im}(p - q)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q}$$

Soit $x \in \text{Ker}(p - q)$. On a $p(x) = q(x)$. Puis

$$x = p(x) + (\text{id} - p)(x) = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Im } q} + \underbrace{(\text{id} - p)(x)}_{\in \text{Ker } p} \in \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker } p + \text{Im } q$. On dispose de $(a, b) \in \text{Ker } p \times E$ tel que $x = a + q(b)$.

Il vient $(p - q)(x) = (p - q)(a + q(b))$

$$= p(a) - q(a) + p \circ q(b) - q^2(b) = -q \circ p(a) + q(b) - q(b) = 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q}$$

Exercice 81 (*)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

Corrigé : Soit $x > -1$. On a

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x - x + x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}}$$

Exercice 82 (**)

Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sin(\pi\sqrt{1+x})$.

Corrigé : On part du développement usuel

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{2^3 \times 3!} + o(x^3)$$

Puis, par trigonométrie

$$\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{8} + \frac{\pi x^3}{16} + o(x^3)\right)$$

Le développement à l'ordre 3 de \sin en ne conservant que les termes d'ordre 3 donne

$$\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi x}{2} + o(x)\right)^3 + o(x^3)$$

D'où

$$\boxed{\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} + \left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{16}\right)x^3 + o(x^3)}$$

Exercice 83 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - e^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Corrigé : 1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ comme composée de telles fonctions. On a le développement et l'égalité fournie par le théorème de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 - 1 - x + o(x))^n = (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on conclut

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad f^{(k)}(0) = 0}$$

2. Un développement de binôme donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{kx}$$

d'où
$$\forall (p, x) \in \llbracket 0; n \rrbracket \times \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p e^{kx}$$

Il en résulte

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!}$$

Exercice 84 (*)

Soient E et F des \mathbb{K} -ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

Corrigé : Soient E et F des \mathbb{K} -ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. On a clairement

$$\operatorname{Im}(f + g) = \{f(x) + g(x), x \in E\} \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \{f(x) + g(y), (x, y) \in E \times F\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g}$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg} g$, il vient

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f + g - g) \leq \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg} g$$

d'où

$$\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg}(f + g)$$

Par symétrie des rôles en f et g , on a également

$$\operatorname{rg} g - \operatorname{rg} f \leq \operatorname{rg}(f + g)$$

On conclut

$$\boxed{|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g}$$

Exercice 85 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \text{Tr}(M)I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et préciser $\text{Ker } \varphi$, $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E , linéaire par linéarité de la trace et du produit. Pour $M \in E$, on obtient

$$\varphi^2(M) = \varphi\left(M - \frac{1}{n} \text{Tr}(M)I_n\right) = \varphi(M) - \frac{1}{n} \text{Tr}(M)\varphi(I_n)$$

et on observe $\varphi(I_n) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi}$$

On a $\text{Im } \varphi = \text{Ker}(\varphi - \text{id}) = \text{Ker } \text{Tr}$ puis, avec l'inclusion $\text{Vect}(I_n) \subset \text{Ker } \varphi$ et pour raison de dimension, on conclut

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(I_n) \quad \text{et} \quad \text{Im } \varphi = \text{Ker } \text{Tr}}$$

Exercice 86 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\text{Ker } \text{Tr}$.

Corrigé : Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On a

$$M \in \text{Ker } \text{Tr} \iff \sum_{i=1}^n m_{i,i} = 0 \iff m_{1,1} = -\sum_{i=2}^n m_{i,i}$$

Ainsi
$$M \in \text{Ker } \text{Tr} \iff M = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^n m_{i,j} (E_{1,1} - E_{i,i})$$

La famille $(E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket} \uplus (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ est donc génératrice de $\text{Ker } \text{Tr}$ et sa liberté est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket} \uplus (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \text{ est une base de } \text{Ker } \text{Tr} .}$$

Exercice 87 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer
$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\text{id} \in \mathcal{C}(u)$, $\mathcal{C}(u)$ sev de $\mathcal{L}(E)$ et $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$ pour v, w dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi

L'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque : On dit que $\mathcal{C}(u)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$.

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme v commute avec u , alors v commute avec u^i pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ puis

$$\begin{aligned} v(u^i(x_0)) &= u^i \circ v(x_0) = u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (u^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\mathcal{C}(u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k, (a_i)_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Variante : Soit $x \in E$. Il existe $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) &= v \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0) \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est génératrice de $\mathcal{C}(u)$. Montrons sa liberté.

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0 , il vient

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \quad \implies \quad \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$ donc est une base de $\mathcal{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n , on conclut

$$\dim \mathcal{C}(u) = n$$

Exercice 88 ()**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé : On décompose

$$A = M + N \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On note f et g endomorphismes canoniquement associés à M et N. On a

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad f(X^k) = kX^{k-1} \quad \text{et} \quad g(X^k) = (n-k)X^{k+1} = nX \cdot X^k - X^2 \cdot kX^{k-1}$$

Par suite $\forall P \in E \quad f(P) = P' \quad \text{et} \quad g(P) = nXP - X^2P'$

Ainsi $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi \quad \text{avec} \quad \forall P \in E \quad \varphi(P) = (1 - X^2)P' + nXP$

Exercice 89 ()**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où \mathcal{C} désigne la base canonique de E.
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\varphi(1) = -nX \in E$$

et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = (k-n)X^{k+1} - kX^k$

d'où $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, y compris le cas $k = n$ puisque le coefficient devant le terme en X^{n+1} s'annule. Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

Et on a $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -n \end{pmatrix}$

2. On a $P \in \text{Ker } \varphi \iff X[(X-1)P' - nP] = 0 \iff (X-1)P' - nP = 0$

Résolvons l'équation différentielle associée sur $]1; +\infty[$ et cherchons des solutions polynomiales :

$$(t-1)x'(t) - nx(t) = 0 \iff x \in \text{Vect}(t \mapsto (t-1)^n)$$

D'où

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}(X-1)^n}$$

Puis, la famille $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est génératrice de $\text{Im } \varphi$. D'après le théorème du rang, on cherche à extraire une famille libre de cardinal n de la famille génératrice précédente. Le caractère échelonnée montre que les familles $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ et $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ font l'affaire mais on peut fournir une base plus simple encore. Par lecture matricielle, on observe

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) \in \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

d'où

$$\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

Par égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (X, \dots, X^n) \text{ est une base de } \text{Im } \varphi.}$$

Exercice 90 (*)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Corrigé : On a $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

S'ensuit un télescopage et on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

Exercice 91 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec $B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit z_1, \dots, z_n des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Corrigé : 1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de scalaires λ_i tels que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}$$

Pour déterminer les λ_i , on effectue l'opération suivante

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left[\frac{A}{B}(X - \alpha_i) \right]_{X=\alpha_i} = \lambda_i$$

Or, en écrivant $B = (X - \alpha_i)Q_i$ avec $Q_i \in \mathbb{K}[X]$, on constate que $P'(\alpha_i) = Q_i(\alpha_i)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}}$$

Variante : On peut retrouver directement le résultat du théorème. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ associée à $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $A = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i)L_i$ d'où

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)L_i}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Pour $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, on a
$$\frac{X^{k+1}}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{k+1}}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, il vient
$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$$

Pour $k = n-1$, on a $\deg X^{k+1} = n$ donc il faudrait isoler la partie entière du reste. On a

$$\frac{X^n}{P} = 1 + \frac{X^n - P}{P} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, on trouve
$$-1 = -\sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)} = \delta_{k,n-1}}$$

Exercice 92 (**)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples x_1, \dots, x_n et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|$$

Corrigé : Si $P(\alpha) = 0$, le résultat est trivial. Sinon, on a

$$\frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha - x_k}$$

On choisit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que
$$|\alpha - x_i| = \min_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\alpha - x_k|$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\alpha - x_k|} \leq \frac{n}{|\alpha - x_i|}$$

Ainsi
$$\boxed{\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left| \alpha - x_i \right| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|}$$

Exercice 93 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t)e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

2. En déduire les comportements de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. En intégrant par partie, les fonctions f et $t \mapsto \frac{e^{int}}{in}$ étant de classe \mathcal{C}^1 , il vient

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt = \left[\frac{f(t)e^{int}}{in} \right]_a^b - \frac{1}{in} \int_a^b f'(t)e^{int} dt$$

D'où
$$\left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \frac{1}{n} \left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Ainsi

$$\boxed{\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

2. On sait

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

Soit n entier. Il vient

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right| = \left| \operatorname{Re} \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right|$$

et de même
$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| = \left| \operatorname{Im} \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right|$$

On conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 94 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$

Corrigé : Pour n entier non nul, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. On a

$$S_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

en séparant les termes diagonaux des autres et par symétrie des sommes hors diagonale. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$S_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f^2(t) dt = O(1)$$

On conclut

$$\boxed{\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2}$$

Exercice 95 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi t |\sin(nt)| dt$$

Montrer que les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes.

Corrigé : Soit n entier non nul. On effectue le changement $u = nt$ de classe \mathcal{C}^1 puis on découpe l'intégrale avec la relation de Chasles et on applique le changement $v = u - k\pi$ de classe \mathcal{C}^1 dans chaque intégrale. On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin u| du = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi |\sin(v + k\pi)| dv = \int_0^\pi \sin v = 2 \end{aligned}$$

On procède de même pour J_n et on poursuit le calcul par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u |\sin u| du = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} u |\sin u| du \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (v + k\pi) |\sin(v + k\pi)| dv \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n \int_0^\pi v |\sin v| dv + \pi \frac{n(n-1)}{2} \int_0^\pi |\sin v| dv \right) \\ J_n &= \frac{1}{n} \left(\int_0^\pi \left(v - \frac{\pi}{2} \right) \sin v dv \right) + \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin v dv \end{aligned}$$

Le changement $s = v - \frac{\pi}{2}$ (de classe \mathcal{C}^1) dans la première intégrale de l'égalité ci-dessus donne

$$\int_0^\pi \left(v - \frac{\pi}{2} \right) \sin v dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s \sin \left(\frac{\pi}{2} + s \right) ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s \cos s ds = 0$$

l'intégrale étant nulle comme intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré. On conclut

Les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes, respectivement égales à 2 et π .

Exercice 96 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n .
3. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
4. En considérant la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$I_n = [-\cos t \sin^{n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t dt = (n-1) (I_{n-2} - I_n)$$

Ainsi

$$\forall n \geq 2 \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

2. On a $I_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin^n t$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit télescopique

$$I_{2n} = I_0 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} \right) = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = I_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et
$$I_{2n+1} = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = I_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

3. La suite $(I_n)_n$ est clairement décroissante.

4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1} , on trouve

$$\forall n \geq 2 \quad n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geq 1 \quad n I_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(I_n)_n$, il vient

$$n I_{n+1} I_n = (n+1) I_{n+1} I_n \times \frac{n}{n+1} \leq n I_n^2 \leq n I_n I_{n-1}$$

Par encadrement

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 97 (**)

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ si q est non nul.

2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions \mathcal{C}^1), il vient

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \left[\frac{t^{p+1} (1-t)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^{q-1} dt$$

Autrement dit

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \dots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0}$$

avec

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} dt = \frac{1}{p+q+1}$$

puis

$$I_{p,q} = \frac{1 \times \dots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \dots \times p \times (p+1) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p! q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1) \binom{p+q}{p}}$$

Exercice 98 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $Y_k = \prod_{i=1}^k X_i$, $a_k = \mathbb{P}(Y_k = 1)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y_k = -1)$.

$$1. \text{ Montrer } \quad \exists Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p .

Corrigé : 1. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(Y_{k+1} = 1 | Y_k = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(Y_{k+1} = 1 | Y_k = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1 | Y_k = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1 | Y_k = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

ce qui se réécrit, par indépendance de X_{k+1} et Y_k

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = -1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad U_{k+1} = QU_k \quad \text{avec } U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad \text{et } Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}}$$

2. On en déduit

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_{k+1} = pa_k + (1-p)b_k = pa_k + (1-p)(1-a_k) = (2p-1)a_k + 1-p$$

La suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est arithmético-géométrique. Le point fixe α est solution de

$$\alpha = (2p-1)\alpha + 1-p \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{puis } \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_{k+1} = (2p-1)a_k + 1-p \iff a_{k+1} - \alpha = (2p-1)(a_k - \alpha)$$

Tous calculs effectués, on conclut

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2} (1 + (2p-1)^n)}$$

Exercice 99 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Corrigé : Soit N entier tel que $X(\Omega) \subset \llbracket 0; N \rrbracket$ (un tel entier N existe puisque $X(\Omega)$ est une partie finie de \mathbb{N}). On a

$$\sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(\{X \geq k\} \setminus \{X \geq k+1\}) = \sum_{k=0}^N k [\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)]$$

Avec un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1) \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X \geq k) - N \mathbb{P}(X \geq N+1)$$

Autrement dit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Variante : On peut aussi écrire

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^N \{X = k\}\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N \mathbb{P}(X = k)$$

puis permuter les sommes.

Exercice 100 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(V^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Corrigé : Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \mathbb{E}(Q(U)) = \mathbb{E}(Q(V))$$

Notons $A = U(\Omega) \cup V(\Omega) = \{a_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$. Par transfert, on a

$$\sum_{i=1}^n Q(a_i) \mathbb{P}(U = a_i) = \sum_{i=1}^n Q(a_i) \mathbb{P}(V = a_i)$$

En considérant la famille des polynômes de Lagrange $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ associés à A , on obtient

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{P}(U = a_j) = \mathbb{E}(L_j(U)) = \mathbb{E}(L_j(V)) = \mathbb{P}(V = a_j)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } U \text{ et } V \text{ ont même loi.}}$$

Remarque : L'étape décisive est de considérer $U(\Omega) \cup V(\Omega)$. Si on ne procède pas ainsi, les choses deviennent rapidement indémêlables ...

Exercice 101 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 0; 2N \rrbracket$ avec N entier non nul. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $m = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité

$$\left\{S_n \geq \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tNn}{2}}\right\}$$

3. En déduire $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq e^{n\varphi(t)}$

avec
$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln\left(\frac{\text{sh}((N + 1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}\right) - \ln(2N + 1)$$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.

5. Conclure qu'il existe $r \in]0; 1[$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) \leq r^n$$

Corrigé : 1. Par linéarité de l'espérance on trouve

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} k = \frac{2N(2N+1)}{2(2N+1)} = N$$

2. On a $m = N$ et par croissance stricte de $u \mapsto e^{tu}$ pour $t > 0$, on obtient

$$\forall t > 0 \quad \left\{ S_n \geq \frac{3nm}{2} \right\} = \left\{ S_n - nN \geq \frac{nN}{2} \right\} = \left\{ e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tnN}{2}} \right\}$$

3. Soit $t > 0$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $e^{t(S_n - nN)}$, il vient

$$\mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) = \mathbb{P} \left(e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tnN}{2}} \right) \leq e^{-\frac{tnN}{2}} \times \mathbb{E} \left(e^{t(S_n - nN)} \right)$$

Puis, par indépendance des X_i

$$\mathbb{E} \left(e^{t(S_n - nN)} \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{t(X_i - N)} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left(e^{t(X_i - N)} \right)$$

et par transfert

$$\mathbb{E} \left(e^{t(X_i - N)} \right) = \frac{e^{-tN}}{2N+1} [1 + e^t + \dots + e^{t2N}] = \frac{e^{-tN}}{2N+1} \times \frac{1 - e^{(2N+1)t}}{1 - e^t}$$

Avec une factorisation de type angle moitié, on obtient

$$\mathbb{E} \left(e^{t(X_i - N)} \right) = \frac{e^{-tN}}{2N+1} \times \frac{e^{(N+1/2)t}}{e^{t/2}} \times \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)} = \frac{1}{2N+1} \times \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}$$

$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) \leq e^{n\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln \left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)} \right) - \ln(2N+1)$$

4. La fonction $t \mapsto \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}$ est paire comme quotient de deux fonctions impaires et son développement limité à l'ordre 1 donne

$$\left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)} \right) \underset{t \rightarrow 0}{=} (2N+1) + o(t)$$

Par suite

$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln((2N+1) + o(t)) - \ln(2N+1) \quad \text{et} \quad \ln((2N+1) + o(t)) = \ln(2N+1) + o(t)$$

Ainsi

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{Nt}{2} + o(t)$$

5. D'après l'équivalent précédemment obtenu, la fonction φ prend des valeurs négatives au voisinage de zéro. On dispose donc de $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) < 0$ et, avec le choix $r = e^{\varphi(t_0)}$, on conclut

$$\exists r \in]0; 1[\quad | \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(S_n \geq \frac{3nm}{2} \right) \leq r^n$$

Exercice 102 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer
$$\mathbb{P}\left(S_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left\{S_n > \frac{np}{2}\right\} \quad \text{et} \quad B_n = \left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

2. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Corrigé : 1. D'après la loi faible des grands nombres, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Soit n entier non nul. On a

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right\} = \left\{S_n \geq \frac{3np}{2}\right\} \sqcup \left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

Ainsi
$$0 \leq \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right)$$

et comme les événements $\left\{S_n > \frac{np}{2}\right\}$ et $\left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$ forment un système complet, on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\text{Arctan}(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$, on dispose de $A > 0$ tel que pour $x \geq A$

$$\left|\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$

On décompose

$$\left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n > \frac{np}{2}\right\} \sqcup \left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

Pour n assez grand, on a $\frac{np}{2} \geq A$ et par conséquent

$$\left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n > \frac{np}{2}\right\} = \emptyset$$

d'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(B_n)$$

Et on conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Exercice 103 (*)

Soit $c = (i_1 \dots i_p)$ un p -cycle de S_n . Pour $\sigma \in S_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Corrigé : On a $\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p))$

Soit $\gamma = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$. On vérifie que $\gamma(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1})$ pour tout $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ et $\gamma(\sigma(i_p)) = \sigma(i_1)$. Par ailleurs, on a $\gamma(i) = i$ pour tout $i \notin \sigma(\text{supp } c)$. Ainsi

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p))}$$

Exercice 104 (*)

Soit $n \geq 2$. Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Corrigé : Soit τ une transposition de S_n . L'application $\varphi : S_n \rightarrow S_n, \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une permutation de S_n (c'est une involution). Par conséquent, on a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau \circ \sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma)$$

Or, la signature d'une transposition est égale à -1 et par conséquent

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0}$$

Variante : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$. Ainsi, notant J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1, on a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = \det J$$

La matrice J contient (au moins) deux colonnes identiques et n'est donc pas inversible. On retrouve alors le résultat précédent.

Exercice 105 (*)

Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n , r et p .

Corrigé : On note $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ la décomposition en cycles à supports disjoints. Il vient

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^r \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^r (-1)^{\ell(c_i)-1} = (-1)^{\sum_{i=1}^r \ell(c_i) - r}$$

où $\ell(c_i)$ désigne la longueur du cycle c_i pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Or, on a

$$n = p + \sum_{i=1}^r \ell(c_i)$$

Ainsi

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p-r}}$$

Exercice 106 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Corrigé : Supposons $z \neq 0$. Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{x}{z} \sum_{i=2}^n L_i$, on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a - \frac{(n-1)xy}{z} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix} = z^{n-1} \left[a - \frac{(n-1)xy}{z} \right] = z^{n-2} [az - (n-1)xy]$$

Pour étendre le résultat précédent au cas $z = 0$, on constate qu'il faut considérer $n = 1$ à part. Supposons $z = 0$. Pour $n > 2$, le déterminant est clairement nul puisqu'il possède deux colonnes identiques. Et pour $n = 2$, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x \\ y & 0 \end{vmatrix} = -xy$$

Finalement, la formule obtenue pour $z \neq 0$ vaut aussi pour $z = 0$ et $n \geq 2$. On conclut

$$\boxed{\Delta_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad \Delta_n = z^{n-2} [az - (n-1)xy]}$$

Variante : On effectue $C_k \leftarrow C_k - C_n$ pour $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$ puis on développe sur la première ligne.

Exercice 107 (**)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $AP = PB$. On note $P_1 = \operatorname{Re} P$ et $P_2 = \operatorname{Im} P$. On a $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$ d'où $A\varphi(t) = \varphi(t)B$ avec $\varphi(t) = P_1 + tP_2$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. D'après la formule du déterminant, on a $t \mapsto \det \varphi(t)$ polynomiale et $\det \varphi(i) \neq 0$ puisque $\varphi(i) = P \in GL_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe t_0 réel tel que $\det \varphi(t_0) \neq 0$ et par conséquent

$$A\varphi(t_0) = \varphi(t_0)B \quad \text{avec} \quad \varphi(t_0) \in GL_n(\mathbb{R})$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 108 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi. On définit

$$\forall \omega \in \Omega \quad V(X_1, \dots, X_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1(\omega) & \dots & X_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{n-1}(\omega) & \dots & X_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(V(X_1, \dots, X_n))$.

Corrigé : On a $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \sim (X_2, X_1, X_3, \dots, X_n)$. En effet, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \llbracket 1; n \rrbracket^n$, il vient par indépendance

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

puis par égalité en loi

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}(X_2 = x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_2) \prod_{i=3}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

et à nouveau par indépendance

$$\mathbb{P}(X_2 = x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_2) \prod_{i=3}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}((X_2, X_1, X_3, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

d'où l'égalité en loi annoncée. Il s'ensuit

$$\mathbb{E}(V_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(V_n(X_2, X_1, X_3, \dots, X_n))$$

Or, d'après les propriétés du déterminant, on a

$$\forall \omega \in \Omega \quad V_n(X_2, X_1, X_3, \dots, X_n)(\omega) = -V_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)(\omega)$$

Par linéarité de l'espérance, il en résulte que

$$\boxed{\mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) = 0}$$

Variante : Par transfert, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) &= \frac{1}{n^n} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \llbracket 1; n \rrbracket^n} V(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{n^n} \sum_{\sigma \in S_n} V(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \frac{1}{n^n} V_n(1, \dots, n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0 \end{aligned}$$

Mais cette approche requiert l'utilisation de la signature.

Exercice 109 (**)

Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.

Corrigé : Pour n entier non nul, il vient

$$\sin(\pi\sqrt{n^4+1}) = \sin\left(\pi n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}\right)$$

On a le développement usuel $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sin(\pi\sqrt{n^4+1}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 + \frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n^2} \sin\left(\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\left| \sin(\pi\sqrt{n^4+1}) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

Ainsi

La série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^4+1})$ converge absolument.

Exercice 110 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Corrigé : La série vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_n$ décroît et tend vers zéro. Avec l'égalité $\int_0^1 t^{2k} dt = \frac{1}{2k+1}$ pour k entier, on a pour n entier par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^2)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2(n+1)} dt = \frac{1}{2n+3}$

Ainsi

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 111 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Corrigé : Soit n entier. On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. On a

$$v_n = \ln \left[e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right] = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Avec le développement $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$, il vient

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

La série $\sum v_n$ converge absolument.

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} [\ln u_{n+1} - \ln u_n]$ converge et par conséquent la suite $(\ln u_n)_n$ admet une limite finie. Passant à l'exponentielle, on obtient

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \quad \text{avec} \quad C > 0$

Remarque : On a donc établi

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{avec } K > 0$$

Il s'agit de l'équivalent de *de Moivre* avec une constante K non explicite, contribution que l'on doit à *Stirling*.

Exercice 112 (Constante γ d'Euler **)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série télescopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'où

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma \right.}$$

Exercice 113 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

$$1. \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \qquad 2. \frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$$

Corrigé : 1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

d'où $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n) + n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{\sigma(n)^2 + n} \leq \frac{1}{\sigma(n)^2}$

Or, on dispose de l'équivalence

$$\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*) \iff \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$

Et comme on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$

Exercice 114 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Corrigé : Pour $p \geq 2$, on pose

$$I_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n = p\} = \{(k, p-k), k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket\}$$

La famille $(I_p)_{p \geq 2}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^{*2} . D'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p^\alpha} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or, on a
$$\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

D'après le critère des équivalents, licite pour des familles positives, et le critère de Riemann, on conclut

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 115 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La sommabilité de $\left(\frac{1}{n^2 - z^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ équivaut à la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - z^2}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{|n^2 - z^2|} \leq \frac{1}{n^2 - |z|^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence absolue par comparaison et critère de Riemann. Puis, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

Vérifions la sommabilité de la famille concernée afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini.

La série géométrique $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k}$ converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2}$$

puis la série
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - |z|^2}$$

converge d'après les résultats antérieurs. Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2(k+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(k+1)}}$$

On conclut

La famille $\left(\frac{1}{n^2 - z^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable avec $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2(k+1)) z^{2k}$.

Exercice 116 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Corrigé : Pour $(P, Q) \in E$, l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, l'intégrande $\theta \mapsto P(\cos \theta) Q(\cos \theta)$ étant continue sur $[0; \pi]$. La forme est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit à gauche et linéarité de l'intégrale. Pour $P \in E$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^\pi P^2(\cos \theta) d\theta \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, l'intégrande $\theta \mapsto P^2(\cos \theta)$ étant continue positif sur $[0; \pi]$, il vient

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P^2(\cos \theta) = 0$$

d'où

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P(\cos \theta) = 0$$

Or, la fonction $\theta \mapsto \cos \theta$ réalise une surjection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$ d'où

$$\forall t \in [-1; 1] \quad P(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve qu'il s'agit du polynôme nul.

On conclut L'application $(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Exercice 117 (**)

Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}$$

Corrigé : On munit \mathbb{R}^{n+1} de sa structure euclidienne canonique. On choisit

$$x = (0, \sqrt{\binom{n}{1}}, \sqrt{2\binom{n}{2}}, \dots, \sqrt{n\binom{n}{n}}) \quad y = (\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}})$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k\right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right)}$$

Enfin, le cas d'égalité n'est pas réalisé car les vecteurs ne sont pas colinéaires et on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}$$

Remarques : 1. On sait calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \dots$

2. On peut aussi considérer \mathbb{R}^{n+1} muni du produit scalaire

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1})^2 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_k$$

Exercice 118 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E .

1. Déterminer $(F + G)^\perp$.
2. En déduire $(F \cap G)^\perp$.

Corrigé : 1. On a $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi, on a $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et $(u, v) \in F \times G$. On a

$$\langle x, u + v \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle = 0$$

d'où l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à F^\perp et G^\perp , il vient

$$F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$$

Passant à l'orthogonal, on obtient

$$\boxed{(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp}$$

Exercice 119 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$.

Corrigé : Notons $\Lambda = \left\{ \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

C'est une partie non vide de \mathbb{R} et minorée donc elle admet une borne inférieure finie. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ pour $(P, Q) \in E^2$ et on note $F = \text{Vect}(X, X^2)$. En utilisant notamment la croissance et continuité de $u \mapsto u^2$ sur \mathbb{R}_+

$$\inf \Lambda = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|1 + aX + bX^2\|^2 = \left(\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|1 - (-aX - bX^2)\| \right)^2 = d(1, F)^2$$

Comme le sev F est de dimension finie, on a par caractérisation métrique du projeté orthogonal

$$d(1, F) = \|1 - p_F(1)\|$$

Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, il vient

$$P = p_F(1) \iff \begin{cases} P \in F \\ 1 - P \in F^\perp \end{cases} \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \begin{cases} P = \alpha X + \beta X^2 \\ \langle 1 - P, X \rangle = 0 \\ \langle 1 - P, X^2 \rangle = 0 \end{cases} \right.$$

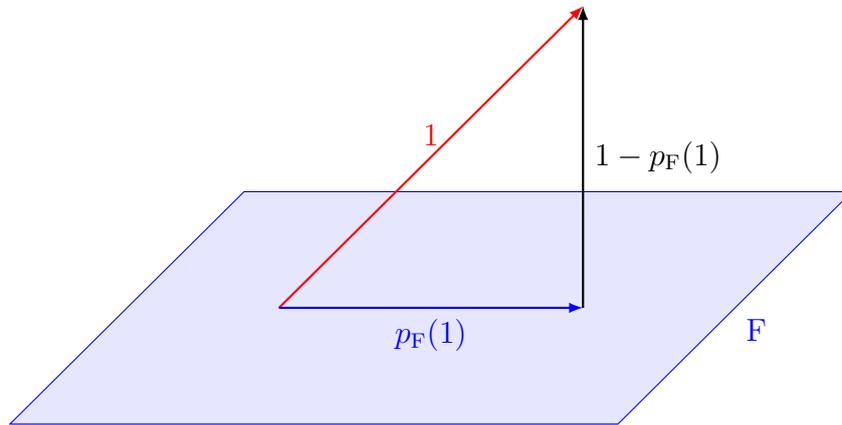


FIGURE 6 – Distance à un sev de dimension finie

Ainsi, les scalaires α, β sont solutions de

$$\begin{cases} \langle X, X \rangle \alpha + \langle X^2, X \rangle \beta = \langle 1, X \rangle \\ \langle X, X^2 \rangle \alpha + \langle X^2, X^2 \rangle \beta = \langle 1, X^2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{5} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(4, -\frac{10}{3}\right)$$

Enfin
$$\|1 - p_F(1)\|^2 = \langle 1 - p_F(1), 1 \rangle = \int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2\right) dt$$

On conclut
$$\boxed{\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt = \frac{1}{9}}$$

Exercice 120 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E . On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = x - \langle x, a \rangle a$$

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis décrire f .
2. On suppose E euclidien muni de \mathcal{B} une base orthonormée. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} a$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$.

Corrigé : 1. L'application f est clairement à valeurs dans E , linéaire par bilinéarité du produit scalaire et du produit externe. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$$

La famille (a) est une base orthonormée de $\text{Vect}(a)$. L'application $x \in E \mapsto \langle x, a \rangle a$ est le projecteur sur $\text{Vect}(a)$ parallèlement à $\text{Vect}(a)^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f = \text{id} - p_{\text{Vect}(a)} \text{ est le projecteur sur } \text{Vect}(a)^\perp \text{ parallèlement à } \text{Vect}(a).}$$

Vocabulaire : Les projecteurs $p_{\text{Vect}(a)}$ et $\text{id} - p_{\text{Vect}(a)}$ sont *associés*. Ils sont dits projecteurs *orthogonaux* puisque leurs images et noyaux sont orthogonaux.

2. Soit $x \in E$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{B}} x$. Par symétrie du produit scalaire, interprétation du produit externe comme produit par une matrice scalaire puis associativité du produit matriciel, il vient en notant $B = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$

$$\begin{aligned} f(x) = x - 2 \langle a, x \rangle a &\iff BX = X - 2(A^\top X)A \\ &= X - 2A(A^\top X) = X - 2(AA^\top)X = (I_n - 2AA^\top)X \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}} f = I_n - 2AA^\top}$$