CH TS1 : Rappels sur les filtres analogiques

Poly à trous

I. Définitions

1) Définition d'un filtre. Linéarité

a) Fonction :

On appelle filtre un circuit conçu pour transmettre sélectivement les différentes composantes fréquentielles d'une excitation e(t).

Pour remplir parfaitement cette fonction **un filtre doit être …**

b) Linéarité

Un opérateur est linéaire si sa réponse à une tension d'entrée $\lambda e_1+\mu e_2$ est $\lambda s_1+\mu s_2$ où λ et μ sont des réels quelconques, s_1 est sa réponse à e_1 et s_2 est sa réponse à e_2.
Il est constitué de composants linéaires donc la relation entre la sortie s(t) et l'entrée e(t) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

Exemples de composants électriques linéaires :

Exemples de composants non-linéaires :

2) Régime transitoire et régime forcé (ou régime établi ou « permanent »).

Exemple :

L'équation différentielle du filtre permet de calculer le signal de sortie s(t) si on connaît le signal d'entrée e(t) et les n conditions initiales $s(0),\dots d^{n-1}s/dt^{n-1}(0)$. La solution vérifiant ces conditions initiales est la somme de deux termes : une solution particulière $s_p(t)$ de l'équation complète et une solution $s_h(t)$ de l'équation homogène.

Le filtre est **stable** si toutes les solutions de l'équation homogène associée à son équation différentielle tendent vers zéro au cours du temps. Alors s(t) tend vers $s_p(t)$ qui est appelée réponse du filtre en **régime établi ou régime forcé**.

Tant que $s_h(t)$ n'est pas négligeable devant $s_p(t)$, on parle de **régime …**

Conséquence de la linéarité : en régime forcé, la réponse d'un circuit linéaire à un signal d'entrée sinusoïdal est un signal de sortie …

Capacité exigible (CE) expérimentale : Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

3) Réponse indicielle (ou réponse à un échelon de tension) et régime libre

a) Réponse indicielle d'un filtre d'ordre 1

e(t)

Forme réduite (ou canonique) de l'équation différentielle :

Temps caractéristique (de décroissance du régime transitoire) :

b) Régime libre d'un filtre d'ordre 2

Forme canonique (ou réduite) de l'équation différentielle *(CE)* :

Pulsation propre :
Facteur de qualité :

Equation caractéristique :

Différents types de régimes libres suivant le signe du discriminant :

- Pseudo-périodique si

- Critique si

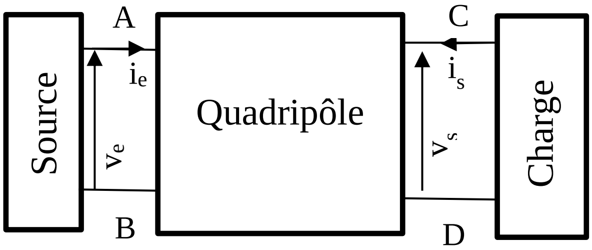
- Apériodique si

CE : Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

4) Réponse harmonique (ou régime sinusoïdal forcé)

a) Définition d'un quadripôle

C'est un élément de circuit à 4 bornes,
Schéma :



Exemple :

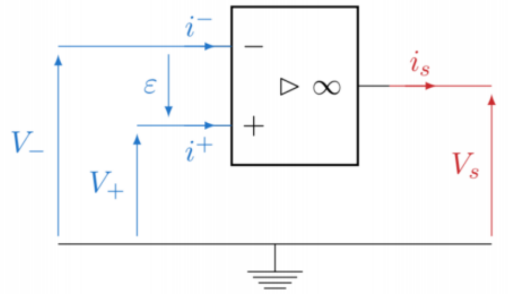
b) Impédance d'entrée $\underline{Z_e}$:

C'est l'impédance du dipôle {quadripôle + charge} vu des bornes d'entrée A et B : $\boxed{\underline{Z_e} = \frac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}}}$

Exemple :

A connaître :
Z_e (oscillo ou voltmètre) ≅
Z_e (ALI idéal) est

Rappels sur l'ALI (Amplificateur Linéaire Intégré):



ALI idéal

Z_e

En régime linéaire :

En régime saturé :

c) Impédance de sortie $\underline{Z_s}$:

C'est l'impédance Z_S du générateur de Thévenin équivalent au dipôle {source + quadripôle} vu des bornes de sortie C et D : $\underline{v_s} = \underline{e_s} + \underline{Z_s}\underline{i_s}$

A connaître : **Z_S (GBF) =**
Z_S(ALI idéal) =

d) Fonction de transfert

En régime sinusoïdal forcé $v_e(t) = V_e\cos(\omega t + \varphi_e)$ alors $v_s(t) = V_s\cos(\omega t + \varphi_e + \varphi)$
Notation complexe $\underline{v_e} = V_e e^{j\varphi_e} e^{j\omega t}$ $\underline{v_s} = V_s e^{j\varphi_e} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

Rappels valeur moyenne, valeur efficace : *(CE : connaître les définitions et savoir faire le calcul)*
Def :

$\langle s(t) \rangle_t =$

$S_{eff} =$

En régime sinusoïdal :

Retenir : $\langle cos(\omega t + \varphi)\rangle_t =$

$et \quad \langle cos^2(\omega t + \varphi)\rangle_t =$

Valeur moyenne :

Valeur efficace :

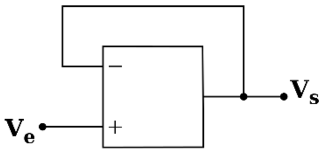
Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ avec G(ω)= |H| le gain en tension

et $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H})$ le déphasage entre s(t) et e(t)

Elle dépend à priori de la charge ou du quadripôle suivant. Exemple :

CE : Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

Rôle du suiveur à connaître (montage également) : fonction isolation
Montage suiveur :



Fonction isolation :

Gain en décibel $\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega))}$

e) Diagramme de Bode

C'est l'ensemble des deux tracés de G_{dB} en fonction de log $(\frac{\omega}{\omega_0})$ (diagramme de Bode en gain) et de φ en fonction de log $(\frac{\omega}{\omega_0})$ (diagramme de Bode en phase)

Exemples dans les deux annexes.

5) Nature d'un filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur, déphaseur

Prévoir la nature du filtre par le rôle de L et C :
Exemple :

- *En BF,*

- *En HF,*

Caractéristiques : - gain maximal G_{max} pour la fréquence f_{max}

- Fréquences de coupure f_c définies par $\boxed{G(f_c) = \quad}$ ou $\boxed{G_{dB} = \quad}$

- facteur de qualité (pour un filtre passe-bande) défini par $\boxed{Q = \quad}$

Q>>1 pour un filtre sélectif

CE : Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

6) Ordre d'un filtre et lien avec la fonction de transfert

Def : C'est l'ordre de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant s(t) à e(t) :

$$D_0 s + D_1 \frac{ds}{dt} + \cdots + D_n \frac{d^n s}{dt^n} = N_0 e + N_1 \frac{de}{dt} + \cdots + N_m \frac{d^m e}{dt^m} \qquad \text{avec } D_0 \text{ non nul}$$

Pour que le circuit soit stable en hautes fréquences, il faut que $n \geq m$ donc **n est l'ordre du filtre.**

Passage de l'équation différentielle à la fonction de transfert : en remplaçant de/dt par $j\omega e$, …

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{N_0 + j\omega N_1 + \cdots + (j\omega)^m N_m}{D_0 + j\omega D_1 + \cdots + (j\omega)^n D_n}$$

L'ordre du filtre est donc aussi le degré du dénominateur de la fonction de transfert mise sous la forme précédente (avec D_0 non nul)

II. **Exemples** *formes canoniques à connaître, diagrammes de Bode en annexes.*

1) Filtres d'ordre 1

CE : Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase)associé a une fonction de transfert d'ordre 1.

a) Passe-bas d'ordre 1: forme canonique (ou réduite) $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$

Passage de la fonction de transfert à l'équation différentielle :

Lien entre la pulsation de coupure ω_c et la durée caractéristique du régime transitoire τ :

b) Passe-haut d'ordre 1 : forme canonique $\underline{H} = \dfrac{H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

2) Filtres d'ordre 2

a) Passe-bande d'ordre 2: forme canonique $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Q est son facteur de qualité

Savoir calculer les fréquences de coupures

Si Q>1 la courbe est au dessus de ses asymptotes, si Q<1 au dessous.
Filtre très sélectif si :

b) Passe-bas d'ordre 2: forme réduite générale $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Résonance pour $Q > 1/\sqrt{2}$

c) Passe-haut d'ordre 2: forme réduite générale $\underline{H} = \dfrac{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Résonance pour $Q > 1/\sqrt{2}$

3) Filtre parfait ou idéal

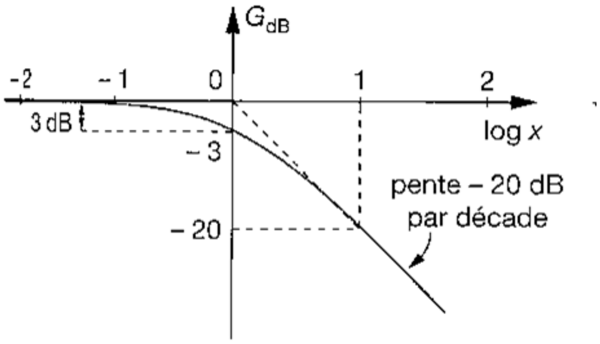
Plus l'ordre d'un filtre est grand, plus ses caractéristiques pourront se rapprocher de celles d'un **filtre parfait ou idéal** (transmission sans déformation des composantes sinusoïdales contenues dans la bande passante du filtre et élimination de toutes les autres).

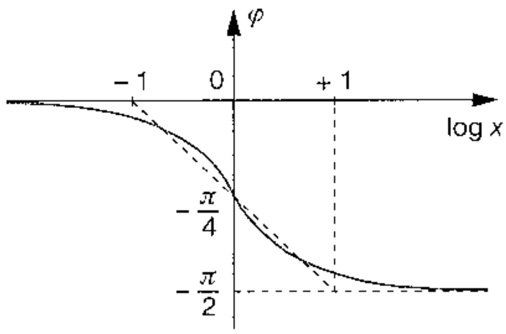
Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas idéal :

La pente d'un filtre passe-bas d'ordre n est -20n dB/décade.
Plus l'ordre est élevé, plus le montage électronique est compliqué. On utilise des filtres numériques (voir Ch TS3) pour réaliser des filtres d'ordres élevé (couramment n=12 pour le traitement du son).

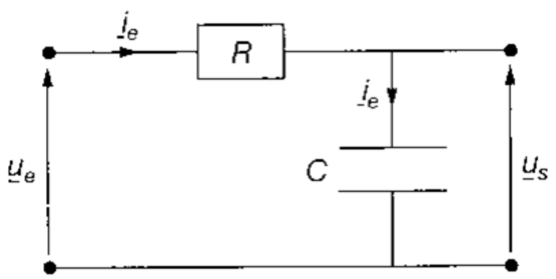
Annexe 1 : Filtres du premier ordre
Fonction de transfert réduite et diagrammes de Bode

Passe-bas d'ordre 1 : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$ tracé pour H_0=+1 avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$



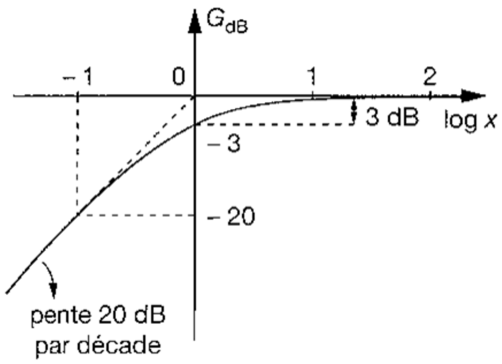


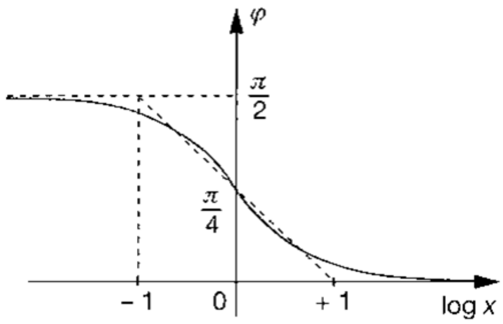
Exemple :



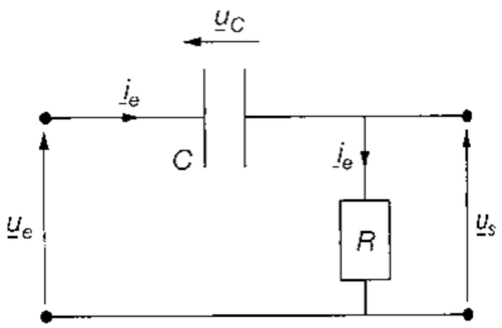
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Passe-haut d'ordre 1 : $\underline{H} = \dfrac{H_0\, j\,\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ tracé pour H_0=+1





Exemple :

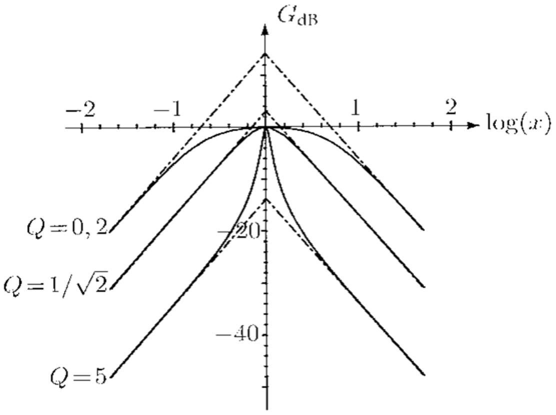


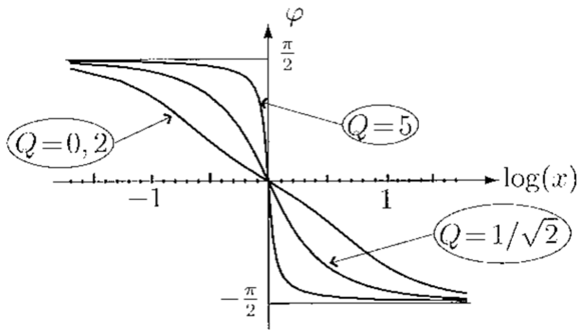
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Annexe 2 : Filtres du second ordre
Fonction de transfert réduite et diagrammes de Bode

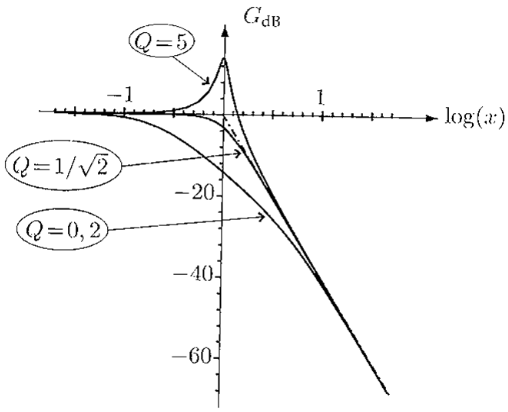
Passe-bande d'ordre 2 : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{j\dfrac{x}{Q}H_0}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

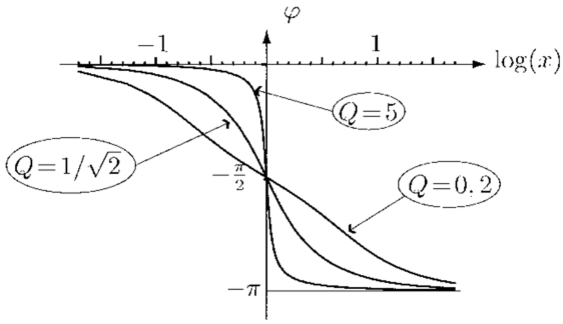
pour H_0=+1 et différentes valeurs du facteur de qualité





Passe-bas d'ordre 2 : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ pour H_0=+1 et différentes valeurs du facteur de qualité





Passe-haut d'ordre 2 : $\underline{H} = \dfrac{-x^2 H_0}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ pour H_0=+1 et différentes valeurs du facteur de qualité