Formulaire (non exhaustif)

1 Inégalités triangulaires

Pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \qquad |x-y| \leqslant |x|+|y| \qquad ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

2 Nombres complexes

Soit θ réel et n entier. On a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

Soit n entier non nul. On a $\qquad \mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0\,;\, n-1]\!]\right\}$

On a $\qquad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\mathrm{X} - \omega) = \mathrm{X}^n - 1 \qquad \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \delta_{n,1}$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$

3 Croissances comparées

Théorème 1. *Soient α, $\beta > 0$. On a*

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad x^\beta \mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad x^\alpha (\ln x)^\beta \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

4 Trigonométrie

Soient t, a, b réels.

1. $\cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$;
2. $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$;
3. $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$;
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
5. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
6. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
7. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
8. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
9. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$;
10. $\cos(t)^2 = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$;
11. $\sin(t)^2 = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$;
12. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
13. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
14. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
15. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$;
16. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$;
17. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$;
18. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

5 Trigonométrie hyperbolique

Soit t réel.

1. $\mathrm{ch}\,(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}$;
2. $\mathrm{sh}\,(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$;
3. $\mathrm{ch}\,(t)^2 - \mathrm{sh}\,(t)^2 = 1$;
4. etc.

6 Calcul de sommes

Soient n entier, q complexe, $(u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des familles de complexes.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Si $q \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} \qquad \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}$$

Si $u_{i,j} = u_{j,i}$
$$2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

7 Formule du binôme

$$\forall (a,b,n) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{N} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

8 Identité de Bernoulli

$$\forall (x,y,n) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{N}^* \qquad x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

9 Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_n$ suite vérifiant $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $a \neq 1$. On pose α point fixe de l'équation de récurrence, *i.e.* $\alpha = a\alpha + b$. On a

$$\begin{cases} u_{n+1} &= a u_n + b \\ \alpha &= a\alpha + b \end{cases} \implies u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Le suite $(u_n - \alpha)_n$ est donc géométrique de raison a.

10 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 2. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite récurrente linéaire d'ordre deux vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{H}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. *L'équation caractéristique* (R) *est*

$$r^2 - ar - b = 0$$

• *Si* (R) *admet deux racines* α, β *distinctes, alors*

$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$$

• *Si* (R) *admet une racine double* α*, alors*

$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n$$

• *Si* $(a, b) \in \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*}$ *et* (R) *admet deux racines complexes conjuguées* $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *et* $\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$*, alors*

$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \underline{\mathbb{R}^2} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

11 Théorème des accroissements finis

Théorème 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ *et* f *dérivable sur* $]\,a\,;b\,[$. *Alors*

$$\exists c \in \,]\,a\,;b\,[\quad | \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 1 (IAF). *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$*,* f *dérivable sur* $]\,a\,;b\,[$ *avec* $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{t \in]\,a\,;b\,[} |f'(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

Alors
$$|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}\,|b - a|$$

On propose une autre version de l'inégalité des accroissements finis, plus utilisée en pratique :

Corollaire 2 (IAF). *Soit* f *dérivable sur* I *avec* f' *bornée sur* I. *Pour* $(a, b) \in \mathrm{I}^2$*, on a*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \|f'\|_\infty\,|b - a|$$

12 Théorème de Taylor-Young

Théorème 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *avec* $a \in \mathrm{I}$ *intervalle de* $\mathbb{R}$. *On a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n)$$

13 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5. *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. *Pour* $(a, b) \in \mathrm{I}^2$*, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b - t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

14 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 6. *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *et* $f^{(n+1)}$ *bornée sur* I. *Pour* $(a, b) \in \mathrm{I}^2$*, on a*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k \right| \leqslant \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

15 Sommes de Riemann

Théorème 7. *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

16 Algèbre linéaire

On note $\mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires de $\mathbb{K}$.
Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ famille de vecteurs de E un $\mathbb{K}$-ev. On a

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in\mathrm{I}} = \left\{\sum_{i\in\mathrm{I}}\alpha_i x_i, (\alpha_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}\right\}$$

En particulier, pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{Vect}\,(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$$

et pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{E}^n$, on a

$$\mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une famille libre et génératrice est une *base* de E.

17 Projections, projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F,G des sev supplémentaires de E. On appelle *projection* sur F parallèlement à G l'application notée $p_{\mathrm{F,G}}$ définie par

$$p_{\mathrm{F,G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = a+b \mapsto a \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}$$

Définition 1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev et* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On dit que* p *est un* projecteur *si* $p^2 = p$*.*

Théorème 8. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. Une projection de* E *est un projecteur. Réciproquement, un projecteur* p *est la projection sur* $\mathrm{Im}\,p$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,p$*.*

18 Involutions linéaires, symétries

Soit F et G deux sev supplémentaires de E. On appelle *symétrie* par rapport à F parallèment à G l'application notée $s_{\mathrm{F,G}}$ définie par

$$s_{\mathrm{F,G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = u+v \mapsto u-v \quad \text{avec} \quad (u,v) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}$$

Définition 2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev et* $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On dit que* s *est une* involution linéaire *si* $s^2 = \mathrm{id}$*.*

Théorème 9. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. Une symétrie de* E *est une involution linéaire. Réciproquement, une involution linéaire est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$*.*

19 Forme linéaire, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Un élément de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est une *forme linéaire.*

Définition 3. *Un* hyperplan *est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Théorème 10. *Soit* H *sev de* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. On a*

$$\mathrm{H} \text{ hyperplan de } \mathrm{E} \iff \exists x \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{H} \quad | \quad \mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathrm{H}$$

20 Algèbre linéaire en dimension finie

Théorème 11. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev avec* $\dim \mathrm{E} = n$. *Une famille de vecteurs de* E *est une base si et seulement si elle libre et constituée de* n *vecteurs ou si et seulement si elle est génératrice et constituée de* n *vecteurs.*

Théorème 12 (Formule de Grassmann). *Soient* F, G *sev de dimensions finies de* E *un* $\mathbb{K}$*-ev. On a*

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$$

Proposition 1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie,* F *et* G *deux sev de* E. *On a l'équivalence*

$$\begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \\ \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} \end{cases} \iff \mathrm{F} = \mathrm{G}$$

Théorème 13. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* F, G *des sev de* E. *On a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$

$$\iff \exists \mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{G} \text{ bases respectives de } \mathrm{F}, \mathrm{G} \mid \mathscr{B}_\mathrm{F} \cup \mathscr{B}_\mathrm{G} \text{ base de } \mathrm{E}$$

Théorème 14 (Théorème du rang). *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* F *un* $\mathbb{K}$*-ev.*

On a

$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$$

Théorème 15. *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev de* <u>*même*</u> *dimension finie. On a*

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

En particulier, si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, *on a*

$$f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \operatorname{Ker} f = \{0_\mathrm{E}\} \iff \operatorname{rg}(f) = \dim \mathrm{E} \iff \det(f) \neq 0$$

Théorème 16. *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ *avec* E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev de dimensions finies. On a*

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

21 Produit matriciel

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\mathrm{AB} = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, q]\!]$.

Proposition 2. *Soit* $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2}$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On a la relation*

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\, n]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$$

Proposition 3. *Pour tout* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, *on a* $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{B}^\top \mathrm{A}^\top$.

22 Trace

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La *trace* de la matrice A notée $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ est définie par

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 17. *Soit* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. *On a* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$.

23 Déterminants

Soit $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

On appelle *comatrice* de A notée Com(A) la matrice des *cofacteurs* de A, *i.e.*

$$\mathrm{Com}(\mathrm{A}) = \big((-1)^{i+j} \det(\mathrm{A}_{i,j})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

avec $\mathrm{A}_{i,j}$ la matrice extraite de A par suppression de sa i-ème ligne et j-ème colonne.

Proposition 4. *Soit* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a :*

1. $$\det(\mathrm{A}^\top) = \det(\mathrm{A})$$
2. $$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$$
3. $$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0$$
4. $$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$$
5. $$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}) \mathrm{I}_n$$

Théorème 18. *Soit* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ *et* $\mathrm{V} = \big(x_i^{j-1}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Le déterminant* $\det(\mathrm{V})$ *dit* de Vandermonde *vaut*

$$\det(\mathrm{V}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

24 Matrices et rang

Théorème 19. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On a* $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant \min(n, p)$.

Théorème 20. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$. *Il existe* P, Q *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$ *avec* $\mathrm{J}_r = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$.

25 Équations différentielles linéaires

Théorème 21. *Soit* $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. *On a*

$$x' = a(t)x \iff x \in \mathrm{Vect}\,(\varphi) \quad \textit{avec} \quad \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \quad \textit{et} \quad \mathrm{A}(t) = \int^t a(s)\,\mathrm{d}s$$

Théorème 22. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & (\mathrm{L}) \\ x(t_0) = x_0 & (\mathrm{CI}) \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s)\, \mathrm{d}s \right) \quad \textit{avec} \quad \mathrm{A}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, \mathrm{d}s$$

Théorème 23. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{H}$$

Soit $x \in \mathrm{S_H}$, solution de l'équation homogène (H), on a :

1. *Si l'équation (R) admet deux racines distinctes α et β,*
$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha t} + \mu \mathrm{e}^{\beta t}$$
2. *Si l'équation (R) admet une racine double α,*
$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = (\lambda t + \mu) \mathrm{e}^{\alpha t}$$
3. *Si $(a, b) \in \underline{\mathbb{R}^2}$ et l'équation (R) admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}s$ ($s \neq 0$)*
$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{rt} \left[\lambda \cos(st) + \mu \sin(st) \right]$$

Proposition 5. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $m \in \mathbb{K}$. L'équation*

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{P}(t) \mathrm{e}^{mt} \tag{L}$$

admet une solution particulière de la forme

1. $x_0(t) = \mathrm{Q}(t) \mathrm{e}^{mt}$ *si m pas racine de (R)*
2. $x_0(t) = t\mathrm{Q}(t) \mathrm{e}^{mt}$ *si m racine simple de (R)*
3. $x_0(t) = t^2 \mathrm{Q}(t) \mathrm{e}^{mt}$ *si m racine double de (R)*

avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.

26 Polynômes

Définition 4. *Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est dit* scindé *s'il peut s'écrire $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et les α_i des scalaires (non nécessairement distincts).*

Théorème 24. *Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ avec $\mathrm{B} \neq 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}$. On a :*

$$\exists!(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \mid \mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \textit{et} \quad \deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{B}$$

Le polynôme Q est appelé quotient *et R le* reste *de la division euclidienne de A par B.*

Proposition 6. *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a*

$$\begin{aligned} a \textit{ racine de } \mathrm{P} \textit{ d'ordre } m &\iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P} = (\mathrm{X} - a)^m \mathrm{Q} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Q}(a) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \\ \mathrm{P}^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 7. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *et* $a \in \mathbb{K}$. *On a*

$$\begin{aligned} a \textit{ racine de } \mathrm{P} \textit{ d'ordre au moins } m &\iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)^m \mathrm{Q} \\ &\iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 25 (Formules de Taylor). *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. *On a*

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k$$

.

Théorème 26 (Polynômes de Lagrange). *Soient* $x_0, \ldots, x_n$ *réels distincts. Il existe une unique famille de polynômes* $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ *de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *telle que* $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ *pour tout* $(i,j) \in [\![0\,; n]\!]^2$ *et on a*

$$\forall i \in [\![0\,; n]\!] \qquad \mathrm{L}_i = \prod_{k \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{\mathrm{X} - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

27 Probabilités

Le cadre considéré est celui vu en MPSI avec Ω un univers fini.

Théorème 27 (Formules des probabilités totales). *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $(\mathrm{A}_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]}$ *un système complet d'événements tels que* $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i) > 0$ *pour tout* $i \in [\![1\,; n]\!]$. *On a*

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$$

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle.

• On dit que X suit une loi *uniforme* sur $[\![1\,; p]\!]$ si $\mathrm{X}(\Omega) = [\![1\,; p]\!]$ et

$$\forall k \in [\![1\,; p]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{1}{p}$$

• On dit que X suit une loi de *Bernoulli* de paramètre $p \in [\,0\,;1\,]$ si $\mathrm{X}(\Omega) = \{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - p$$

• On dit que X suit une loi *binomiale* de paramètre (n,p) avec n entier et $p \in [\,0\,;1\,]$ si $\mathrm{X}(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0\,; n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Proposition 8. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Si* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes, alors*

$$\forall (\mathrm{A}_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathrm{X}_i(\Omega)) \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \in \mathrm{A}_i\} \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \in \mathrm{A}_i)$$

Autrement dit, les événements $\{\mathrm{X}_i \in \mathrm{A}_i\}_{i \in [\![1\,;n]\!]}$ *sont indépendants.*

Théorème 28. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Si* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes de même loi* $\mathscr{B}(p)$ *avec* $p \in [\,0\,;1\,]$, *alors* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *suit une loi binomiale* $\mathscr{B}(n,p)$.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle. On définit *l'espérance* de X notée $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ par

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

On définit la *variance* de X notée $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ par

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}\left[(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\right]$$

Théorème 29 (Théorème de transfert). *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini,* X *une variable aléatoire réelle et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *avec* $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathrm{I}$. *On a*

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

Proposition 9 (Relation de König-Huygens). *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* X *une variable aléatoire réelle. On a*

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2$$

Proposition 10. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $\mathrm{X} \sim \mathscr{B}(p)$ *avec* $p \in [\,0\,;1\,]$. *On a*

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = p \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = p(1-p)$$

Proposition 11. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* $\mathrm{X} \sim \mathscr{B}(n, p)$ *avec* $(n, p) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,]$. *On a*

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$$

Théorème 30 (Inégalité de Markov). *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* X *une variable aléatoire réelle positive. On a*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{\varepsilon}$$

Théorème 31 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* X *une variable aléatoire réelle. On a*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}$$