Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ convergente. Montrer que pour tout $x \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé : Par continuité de f, on a $\mathrm{F} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{y} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > a$, on note $\delta = x - a > 0$. On a $\mathrm{F}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{F}(y) \underset{y\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$ et par conséquent

$$\mathrm{F}(y)\mathrm{e}^{-\delta y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\delta t}) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc le crochet $\left[\mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\right]_0^{+\infty}$ est fini et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } x \geqslant a\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Corrigé : 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \geqslant 0$. On a $\qquad \forall t \in [\,x\,; x+\eta\,] \qquad |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Ainsi, par inégalité triangulaire

$$\left| f(x) - \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \frac{1}{\eta}\left| \int_x^{x+\eta} (f(x) - f(t))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

d'où $$|f(x)| \leqslant \left| f(x) - \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Or $$\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, il existe un seuil $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que, pour $x \geqslant \mathrm{A}$, on ait $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, autrement dit

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

2. Soit $y > x$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_x^y f'(t)^2\, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t}$$

On a $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| \int_x^{x+1} f'(t)^2\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} \geqslant 0$

Puis, notant $p = \lfloor y - x \rfloor$, on a

$$\int_x^y f'(t)^2\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t)^2\, \mathrm{d}t + \int_{x+p}^{y} f'(t)^2\, \mathrm{d}t \leqslant (p+1)\mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}(y - x + 1)$$

Ainsi $\qquad |f(y) - f(x)| \leqslant \sqrt{\mathrm{M}} \sqrt{(y - x + 1)(y - x)}$

Notant $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 1)}$, on a $\omega(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{=} \mathrm{o}(1)$ et l'uniforme continuité en découle. Par application du résultat précédent, on conclut

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

Exercice 3 (***)

On note $\qquad \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\, \mathrm{d}t$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
2. En déduire la valeur de I et J.

Corrigé : 1. Notons $f(t) = \ln(\sin(t))$ pour $t \in \left]0\,; \frac{\pi}{2}\right]$. On a $f \in \mathscr{C}^0\left(\left]0\,; \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$. Avec le développement usuel $\sin(t) = t + \mathrm{o}(t)$, il vient

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $\left]0\,; \frac{\pi}{2}\right]$. Avec le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - u$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) \mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\, \mathrm{d}t \text{ sont convergentes et égales.}}$$

2. Par linéarité de l'intégrale car convergence, on a

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))]\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Toujours par linéarité $\qquad \mathrm{I} + \mathrm{J} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\, \mathrm{d}t$

Avec le changement de variables $u = 2t$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$2\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\frac{\pi}{2}\ln(2)\right) = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles, il vient

$$2\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\frac{\pi}{2}\ln(2)\right) - \mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Un dernier changement de variable $t = u + \dfrac{\pi}{2}$ fournit l'égalité

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)\right)\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}$$

Ainsi $$2\left(\mathrm{I}+\mathrm{J}+\frac{\pi}{2}\ln(2)\right) - \mathrm{I} = \mathrm{J} \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \mathrm{J}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{J} = -\frac{\pi\ln(2)}{2}}$$

Exercice 4 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1+\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

1. Justifier que F et G sont bien définies.
2. Montrer $\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{G}(x)$. Les intégrandes sont-ils également équivalents en $+\infty$?

Corrigé : 1. Notons $f(t) = \dfrac{1+\sin(t^2)}{t^2}$ et $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ pour $t > 0$. On a f et g continues sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad g(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent $\boxed{\text{Les fonctions F et G sont bien définies sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$

2. On a $$\frac{\sin(t^2)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par linéarité car convergence, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -\cos(t^2)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t^3}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$-\frac{\cos(t^2)}{2t^3} \xrightarrow[t\to x]{} -\frac{\cos(x^2)}{2x^3} \quad \text{et} \quad -\frac{\cos(t^2)}{2t^3} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{3\cos(t^2)}{2t^4}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t^3}\right]_x^{+\infty} - \frac{3}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

puis
$$\frac{\cos(x^2)}{2x^3} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et
$$\frac{\cos(t^2)}{t^4} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où, par intégration de relation de comparaison
$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^4}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \frac{1}{x}$$

Et par conséquent
$$\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{G}(x)}$$

En revanche
$$\frac{1+\sin(t^2)}{t^2} \not\sim \frac{1}{t^2}$$

puisque $t \mapsto \sin(t^2)$ ne tend pas vers zéro en $+\infty$. Ainsi, les intégrandes ne sont pas équivalents.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$. D'après le théorème fondamental d'analyse, on a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{F}' = f$. Par suite
$$\forall x > 0 \qquad g(x) = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{F}'(0) = f(0)$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } g \text{ se prolonge par continuité en } 0.}$

2. On procède par intégration par parties. On a
$$\int g^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{F}(x)^2}{x}\right] + \int \left[\frac{2f(x)}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

en particulier
$$\frac{\mathrm{F}(x)^2}{x} = x \times \left(\frac{\mathrm{F}(x)}{x}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

d'où
$$\forall a \geqslant 0 \qquad \int_0^a g^2(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{F}(a)^2}{a} + 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\forall a \geqslant 0 \qquad \left(\int_0^a g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^a g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

En supposant f non identiquement nulle et par conséquent g non plus, on obtient

$$\forall a \geqslant 0 \qquad \int_0^a g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et on a } \int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
3. Pour n entier, calculer $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout n entier.
4. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$
5. On pose $f(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{2}{t}$ pour $t \in\,]\,0\,;\pi\,]$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On choisit une primitive de sin qui s'annule en 0, à savoir $t \mapsto 1-\cos(t)$. Les fonctions $t \mapsto 1-\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$. D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. L'intégrande de cette dernière intégrale est continu sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a

$$-\frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$ et $\left(t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\right)$ sont continues respectivement sur $]\,0\,;\pi\,]$ et $\left]\,0\,;\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\right]$. Au voisinage de zéro, avec l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on trouve

$$\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(n+\frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 2(n+\tfrac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

Ainsi, les deux intégrandes sont prolongeables par continuité en zéro donc les intégrables définissant I_n et J_n sont faussement impropres d'où

$$\boxed{\text{Les intégrales définissant } \mathrm{I}_n \text{ et } \mathrm{J}_n \text{ sont bien définies pour tout } n \text{ entier.}}$$

3. Par trigonométrie, on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Par linéarité car convergence, on trouve pour n entier

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^\pi \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left[\sin\left((n+\tfrac{3}{2})t\right) - \sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^\pi \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^\pi$$

Autrement dit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = 0}$

Ainsi, la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est constante et on a

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^\pi \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \pi}$

4. En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{-\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(0)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = 0}$$

5. On a $\qquad \forall t \in \,]\,0\,;\pi\,] \qquad f(t) = \dfrac{t - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

La fonction $f \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec un développement de sin à l'ordre 2, on trouve

$$\forall t \in]\,0\,;\pi\,] \qquad f(t) = \frac{t - t + \mathrm{o}(t^2)}{t\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\mathrm{o}(t^2)}{\frac{t^2}{2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = f(0)$$

Ainsi, on a $f \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;\pi\,],\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in]\,0\,;\pi\,] \qquad f'(t) = \frac{4 - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

On a $$2t^2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 \underset{t\to 0}{\sim} 2t^2 \times \frac{t^2}{4} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^4}{2}$$

Avec un développement de cos aux ordres 4 et 2 respectivement, on trouve

$$4 - 4\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 - t^2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) = 4 - 4\left(1 - \frac{t^2}{4} + + \frac{t^4}{4!2^4}\right) - t^2\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) + \mathrm{o}(t^4) = \frac{1}{24}t^4 + \mathrm{o}(t^4)$$

Par suite $$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^4}{24}}{\frac{t^4}{2}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{12}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, on a f dérivable en 0 et f' continue en 0 d'où

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\,0\,;\pi\,].}$$

6. On applique le résultat de la question 5 avec la fonction f introduite à la question 6 et on trouve par linéarité de l'intégrale car convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{I}_n - 2\int_0^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

Or on sait que $\mathrm{I}_n = \pi$ pour tout n entier et en posant $u = (n+\frac{1}{2})t$, il vient

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{J}_n$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : On a $$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} a$$

Quitte à multiplier par -1, on peut se ramener au cas d'une constante positive. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,\mathrm{d}t$ diverge clairement et par intégration des relations de comparaison, il vient

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x a\,\mathrm{d}t = ax$$

c'est-à-dire
$$\ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) = ax + \mathrm{o}(x)$$

d'où
$$\ln(x^2 f(x)) = 2\ln(x) + ax + \mathrm{o}(x) - \ln(f(0)) = ax + \mathrm{o}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

autrement dit
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et
$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} af(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } f' \text{ sont intégrables sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$