

Feuille d'exercices n°01

Exercice 1 (*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

3. $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$

5. $\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$

4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$

6. $\int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)}$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

3. $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} dt$

5. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)}$

4. $\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t}) dt$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} dt$

Exercice 3 (*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+\ln(t)^2)}$

Exercice 4 (**)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout n entier.
2. Pour n entier non nul, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} .
3. En déduire une expression de I_n pour tout n entier.

Exercice 5 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

3. $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$

Exercice 6 (**)

On pose $\forall a > 0 \quad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$

1. Justifier que $I(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Calculer $I(1)$.
3. En déduire la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 7 (**)

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1 + t^4}$.

2. Établir $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1 + t^4}$

3. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1 + t^4}$ puis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$.

Exercice 8 (**)

Montrer $\int_0^x \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$

Exercice 9 (*)

Déterminer un équivalent simple pour $x \rightarrow +\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt$.