Feuille d'exercices n°02

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$

Exercice 2 (**)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur en cas de convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

Exercice 3 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

1. Justifier que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer un équivalent de $\Phi(x)$ pour $x \to +\infty$.
2. Établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x) \mathrm{d}x$ et calculer cette intégrale.

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t)) \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \mathrm{d}t$

Exercice 5 (Intégrales de Bertrand ***)

Étudier, en fonction des réels α et β, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$.

Exercice 6 (***)

Déterminer la nature des intégrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$$
puis commenter.

Exercice 7 (***)

1. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$ et $a > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} [\mathrm{Arctan}\,(t+1) - \mathrm{Arctan}\,t]\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (***)

On pose $$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$$

Justifier que F est bien définie sur $]-1\,;1\,[$ puis déterminer une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \,]-1\,;1\,[$.

Exercice 9 (***)

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(]\,0\,;1\,]\,, \mathbb{R})$ décroissante positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $(\mathrm{S}_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$