ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 09/09/24

Préparation à l'interrogation n°01

1 Trigonométrie

$$\begin{aligned}\sin(t)^{2n} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n} = \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-k)t}\\ &= \frac{1}{4^n(-1)^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t} \underbrace{=}_{(-1)^n=(-1)^{-n}} \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}\end{aligned}$$

2 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int^x \frac{1+t+1-t}{2(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$;
2. Avec $\alpha\neq 1$, $\displaystyle\int^x\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$

3 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $\displaystyle x^n-y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1}x^ky^{n-1-k}$

4 Étude asymptotique

1. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2!}+\mathrm{o}(x^2) = 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)$;
2. $\displaystyle\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \ln\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}+\mathrm{o}(t^4)\right) = -\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\frac{1}{2}\frac{t^4}{(3!)^2}+\mathrm{o}(t^4) = -\frac{t^2}{6}-\frac{t^4}{180}+\mathrm{o}(t^4).$

5 Croissances comparées

Soient α, $\beta>0$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty \qquad x^\beta\mathrm{e}^{-\alpha x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \qquad x^\alpha(\ln x)^\beta\xrightarrow[x\to 0]{}0 \qquad \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

6 Exercice type

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. Si Re $\alpha>0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.

Corrigé : Pour $x\geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$ et $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| = \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\alpha)x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Le résultat suit.

7 Exercice type - Lemme de Riemann-Lebesque

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. En intégrant par partie, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b - \frac{1}{\mathrm{i}n}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

8 Questions de cours

Intégrales généralisées, graphes usuels.