CH TS2 : Analyse harmonique
Effet d'un filtre sur un signal périodique

Poly à trous

I. Décomposition harmonique d'un signal périodique :

1) Développement d'un signal périodique en série de Fourier

Capacité exigible (CE) : Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

Théorème de Fourier : première forme du développement

Soit s(t) un signal physiquement réalisable (au moins C^1 par morceaux) et périodique de période $T = 2\pi/\omega$.
A toute date t où le signal est continu, il est développable de façon unique en série de Fourier :
$s(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$ où les coefficients de Fourier A_n et B_n sont
$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt$ et $B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt$ avec t_0 une date arbitraire.

Autre forme du développement

$$\boxed{s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

avec $C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$ la composante continue (valeur moyenne)

$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ l'amplitude (du fondamental pour n=1 ou) de l'harmonique de rang n

En notation complexe

$\underline{s}(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega t}$ avec $C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$ et $\forall n \geq 1$ $\underline{C}_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)e^{-jn\omega t}dt$

Lien avec le développement réel : $C_n = |\underline{C}_n|$ et $\varphi_n = \arg(\underline{C}_n)$

Ne pas apprendre les expressions de A_n, B_n et C_n, les développements en série de Fourier sont toujours donnés dans les sujets.

2) Vocabulaire

Ainsi un signal s(t) est décomposé en :

- un signal constant $s_0 = C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$ qui est la **valeur moyenne** de s(t) sur une période et qui est appelé sa
- un terme sinusoïdal $s_1(t) = A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t) = C_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ de même période que le signal s(t) appelé le
- un nombre infini de termes sinusoïdaux $s_n(t) = A_n\cos(n\omega t) + B_n\sin(n\omega t) = C_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$ de pulsations nω (n>1) appelés

$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(t)$

L'ensemble du fondamental et des harmoniques constituent

3) Propriétés

- Si s(t) est paire son développement en série de Fourier l'est aussi d'où :
$\forall n \quad B_n = 0$ et $s(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n \cos(n\omega t)]$

- Si s(t) est impaire son développement en série de Fourier l'est aussi d'où :

$$\forall n \quad A_n = 0 \text{ et } s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [B_n \sin(n\omega t)]$$

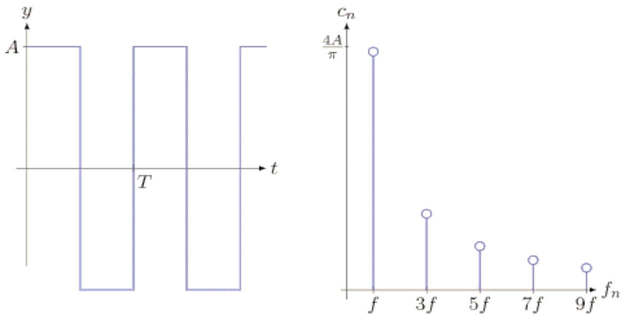
- Pour un signal physique, à partir d'un certain rang les harmoniques deviennent négligeables :

$$\lim_{n\to+\infty}(C_n) = 0$$

4) Représentation spectrale

Le spectre est la représentation graphique des coefficients C_n (spectre en amplitude) (et éventuellement φ_n (spectre en phase)) en fonction des rangs n ou des fréquences ou des pulsations.
C'est un spectre discret ou spectre de raies (pour un signal périodique).

Exemple : représentation temporelle et spectrale d'un signal carré



Exercice : tracer le spectre en amplitude et en phase du signal s(t)=S_0.sin(ωt)

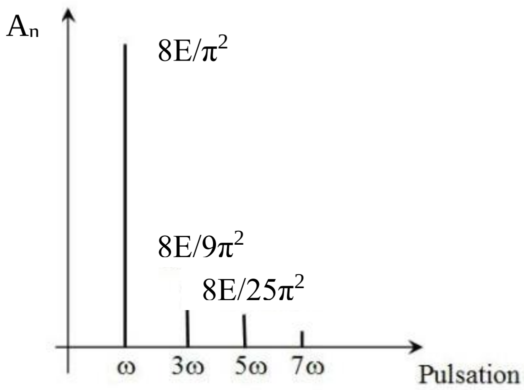
5) Synthèse de Fourier

Notons $s_{Fn}(t)$, et appelons synthèse de Fourier de rang n, la série de Fourier de s(t) limitée à ses n premiers termes : $s_{Fn}(t) = C_0 + \sum_{p=1}^{n} C_p \cos(p\omega t + \varphi_p)$

$$s_{Fn}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} s(t)$$

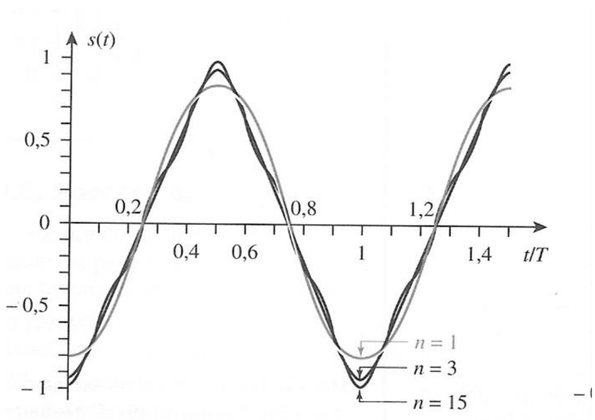
Une synthèse de Fourier de rang n faible suffit souvent à représenter s(t) de façon satisfaisante (surtout lorsque s(t) ne présente pas de discontinuités). Exemple :

Spectre d'un signal triangulaire (pair d'amplitude E) :



$$s(t) = -\frac{8E}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)\omega t)$$

Synthèse de Fourier d'un signal triangulaire : *avec E=1V*

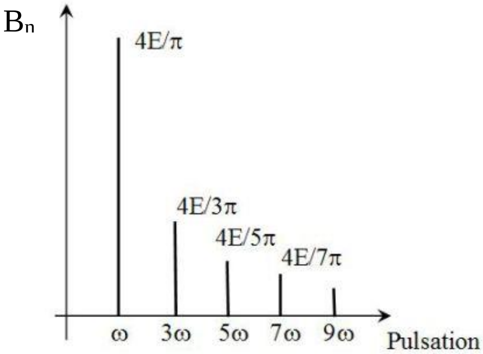


Commentaire :

Rôle des différents harmoniques dans la forme du signal :
la présence d'harmoniques de rang élevé dans le spectre rend compte de l'existence de variations brutales du signal au cours du temps (fortes pentes ou discontinuités).

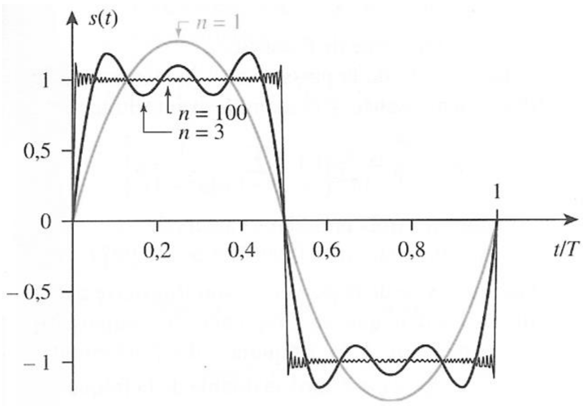
Illustration : Comparaison des spectres et synthèse de Fourier d'un signal triangulaire et d'un signal créneau (ou « carré »).

Spectre d'un signal créneau (impair d'amplitude E) :



$$s(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}\sin((2p+1)\omega t)$$

Synthèse de Fourier d'un signal créneau :
avec E=1V



Comparaison :

CE : Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.

6) Valeur efficace et taux de distorsion harmonique

La moyenne quadratique d'un signal périodique est la somme des moyennes quadratiques de ses composantes sinusoïdales $\langle s^2\rangle = \sum_n \langle s_n^2(t)\rangle = C_0^2 + \sum_n C_n^2/2$ *(Théorème de Parseval)*
Cette propriété permet de calculer la valeur efficace de s(t)

Interprétation : l'énergie ou la puissance moyenne associée à une fonction périodique s(t) est égale à la somme des énergies ou puissances moyennes associées à chacune des composantes de Fourier de s(t).
CE : Interpréter le fait que le carre de la valeur efficace d'un signal peéiodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques

Taux de distorsion harmonique : c'est le rapport de la valeur efficace de la somme des harmoniques supérieurs à celle du fondamental : TDH=$\frac{\sqrt{c_2^2+c_3^2+c_4^2+\cdots}}{c_1}$. Ce taux mesure l'écart entre le signal et la sinusoïde pure.
Non exigible, défini dans les sujets de concours.

Pour une sinusoïde pure, TDH =

II. Effet d’un filtre sur un signal périodique

1) Principe de l’utilisation du développement en série de Fourier

CE : Prévoir l’effet d’un filtrage linéaire sur la composition spectrale d’un signal périodique.

Développement du signal de sortie :

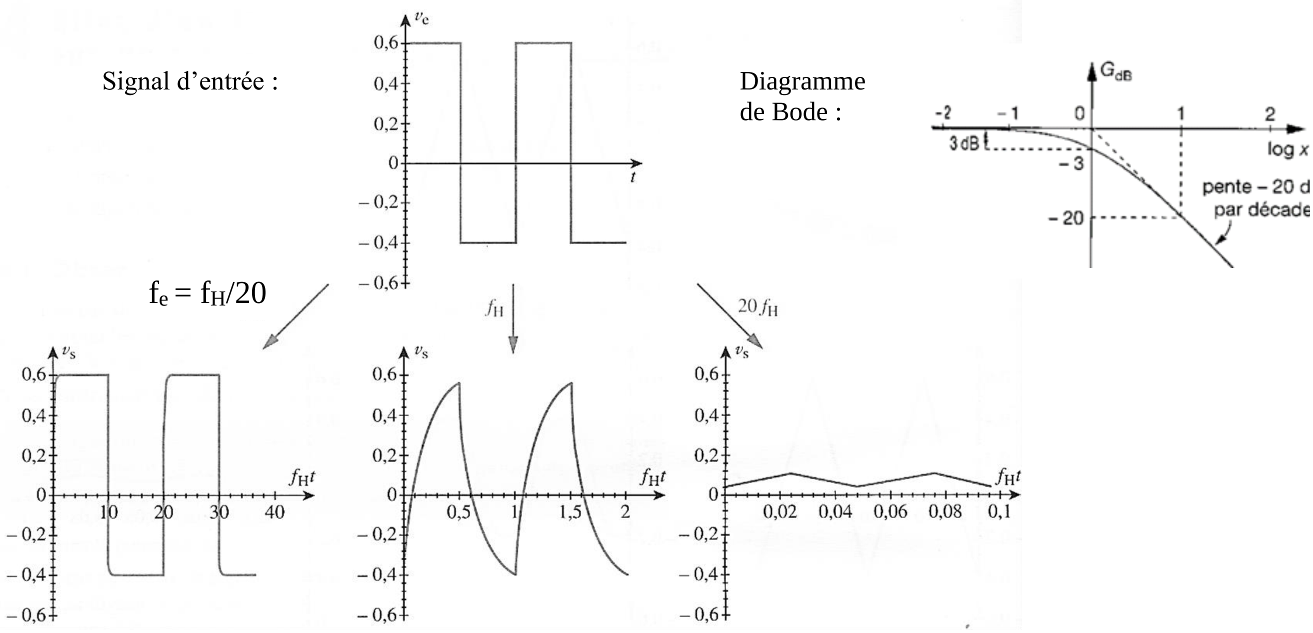
- Le signal d’entrée e(t) est **périodique de période T_e** donc développable en série de Fourier
$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_e t + \varphi_{e,n}) = \sum_n e_n(t)$ avec $\omega_e = 2\pi / T_e$
En notation complexe $\underline{e}(t) = \sum_n \underline{e_n}(t)$ avec $\underline{e_n} = \cdots$

- **Le filtre est linéaire** donc la réponse à e(t) est la somme des réponses à chaque terme $e_n(t)$ de son développement en série de Fourier. Chaque terme $e_n(t)$ est sinusoïdal de pulsation $n\omega_e$ donc la réponse du filtre à cette excitation est donnée par la fonction de transfert du filtre **à la même pulsation $n\omega_e$**:
$\underline{s_n}(t) = \underline{H}(n\omega_e)\underline{e}_n(t)$ avec la fonction de transfert $\underline{H}(n\omega_e) = G(n\omega_e)e^{j\psi(n\omega_e)}$
- Le développement en série de Fourier du signal de sortie est donc : $\underline{s}(t) = \sum_n \underline{H}(n\omega_e)\underline{e_n(t)}$
d'où $s(t) = \cdots$

Utilisation du diagramme de Bode : On observe sur le diagramme de Bode comment sont transmis la composante continue (fréquence f=0), le fondamental (f_e) et chacun des harmoniques (nf_e).
Voir exemple paragraphe suivant.

2) Exemple 1 : effet du filtre passe-bas du premier ordre sur un signal créneau

Réponse d’un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure f_H à un signal en créneaux d’amplitude crête à crête 1 V, de fréquence $f_e = f_H/20$, f_H et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V :



Commentaires :

- La composante continue est

- Si $f_e << f_H$,

- Si $f_e >> f_H$,

3) Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre dans un domaine limité de fréquences

CE : Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur.

Caractère intégrateur : $\boldsymbol{s \propto \int e\, dt}$
Pour un signal sinusoïdal $\underline{s} \propto \int \underline{e}\, dt \propto \frac{\underline{e}}{j\omega}$ ou $\underline{H} \propto$

Domaine intégrateur d'un filtre : c'est un domaine de fréquences dans lequel

Rem : domaine intégrateur inverseur si :

Conclusion : le domaine intégrateur ou intégrateur inverseur d'un filtre est le domaine de fréquences dans lequel son diagramme de Bode présente une pente de :

Dans ce domaine, le filtre intègre un signal sinusoïdal.

Un filtre intègre l'ondulation d'un signal périodique si le fondamental et tous les harmoniques d'amplitude importante du signal sont dans le domaine intégrateur du filtre.

Exemples :

Caractère dérivateur : $\boldsymbol{s \propto \frac{de}{dt}}$
Pour un signal sinusoïdal $\underline{s} \propto \frac{d\underline{e}}{dt} \propto j\omega\underline{e}$ ou $\underline{H} \propto$

Domaine dérivateur d'un filtre : c'est un domaine de fréquences dans lequel

Rem : domaine dérivateur inverseur si :

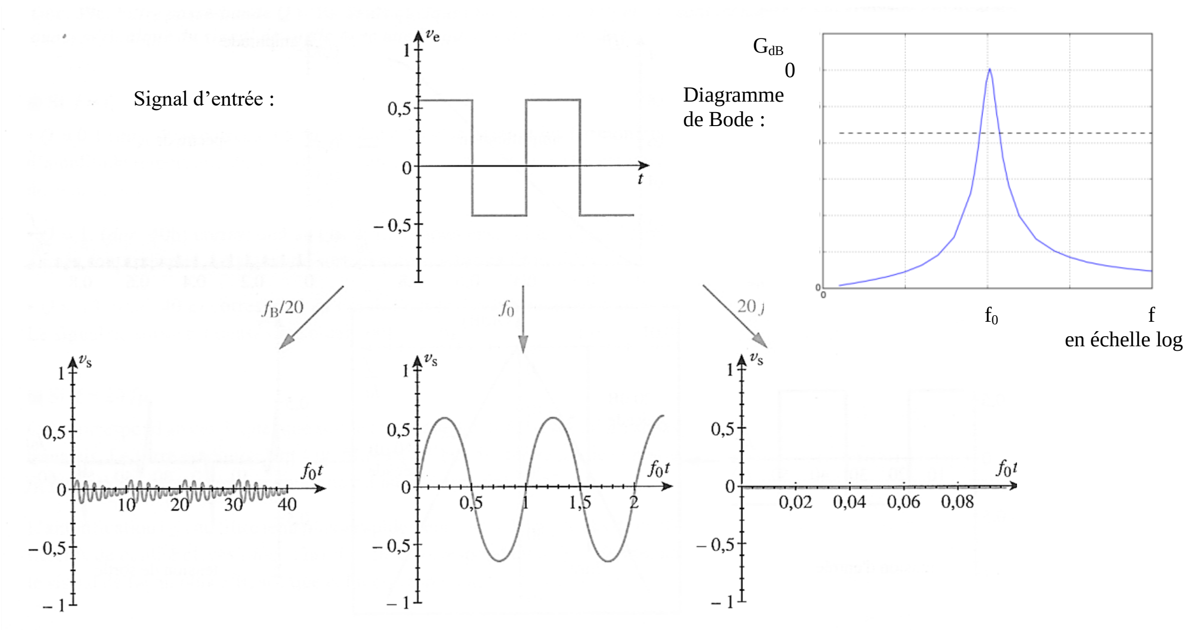
Conclusion : le domaine dérivateur ou dérivateur inverseur d'un filtre est le domaine de fréquences dans lequel son diagramme de Bode présente une pente de :

Dans ce domaine, le filtre dérive un signal sinusoïdal.
Un filtre dérive l'ondulation d'un signal périodique si le fondamental et tous les harmoniques d'amplitude importante du signal sont dans le domaine dérivateur du filtre.

Exemples :

4) Exemple 2 : effet d'un filtre passe-bande du second ordre sur un signal créneau

Filtre passe-bande de facteur de qualité Q=10 et de fréquences de coupure f_B =0,95f_o et f_H =1,05f_o .
Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête à crête 1 V , de fréquence f_B/20, f_o et 20f_H , superposé à une composante continue de 0,1 V.



Commentaires :

- La composante continue est
- Si f_e<<f_B
- Si f_e = f_0,
- Si f_e>>f_H,

5) Caractérisation de la linéarité d'un système

L'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre du signal de sortie ne peut se produire que pour un système non linéaire. Un système linéaire ne fait qu'amplifier ou atténuer les harmoniques du signal d'entrée.

CE : Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

On observera l'effet d'une diode en TP « Analyse harmonique ».

III. Signal non périodique : transformée de Fourier

1) Transformée de Fourier

Signal d'énergie finie : Un signal s(t) d'énergie finie est caractérisé par le fait que l'intégrale indéfinie $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt$ converge (fonction de carré sommable)

Exemple :

Contre-exemple :

Transformée de Fourier :

La transformée de Fourier d'un signal s(t) d'énergie finie est : $TF\left(\underline{s}(t)\right) = \underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{s}(t)e^{-j\omega t}dt$

La transformée de Fourier inverse est : $\underline{s}(t) = TF^{-1}(\underline{S}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Spectre de s(t) : C'est le tracé de $\left|\underline{S}(\omega)\right|$ et $\arg(\underline{S}(\omega))$) en fonction de ω.

C'est un spectre continu.

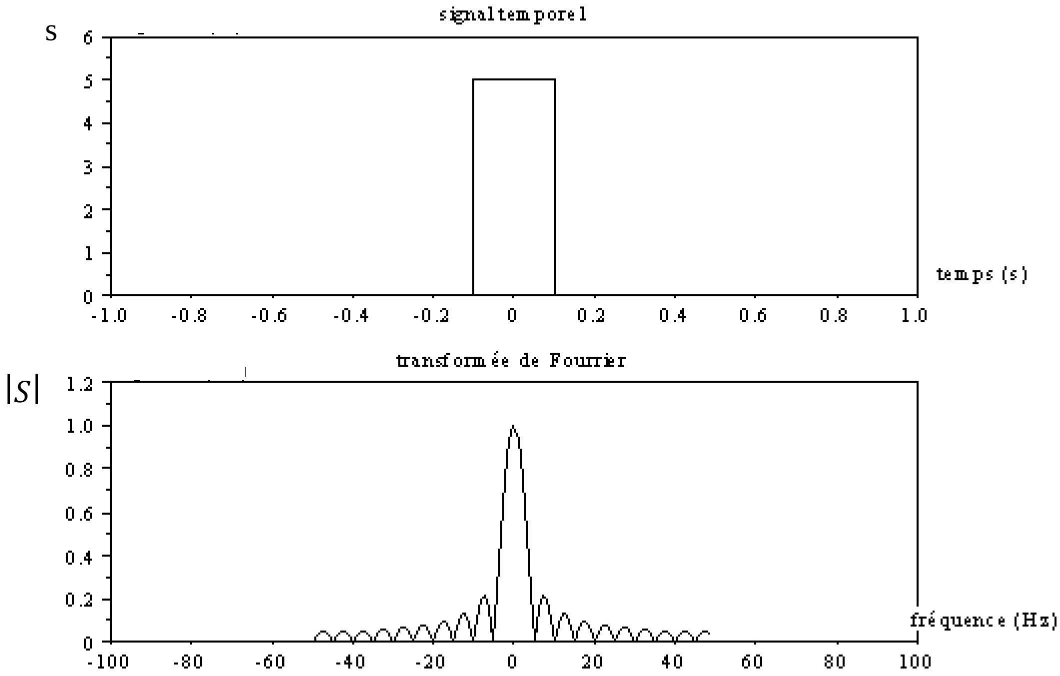
2) Application : spectre d'une impulsion de tension

Transformée de Fourier d'une impulsion de durée τ :

$\underline{S}(\omega) =$

Calcul :

Tracé de s(t) et de son spectre :



Sur cet exemple, on mesure $\tau = \Delta t =$

$\Delta f =$

On en déduit $\Delta f.\tau =$

La durée τ d'un signal et son étalement spectral Δf sont liés par la relation : $\boldsymbol{\Delta f.\tau \approx 1}$

Plus une impulsion est brève, plus l'encombrement spectral du signal est grand.