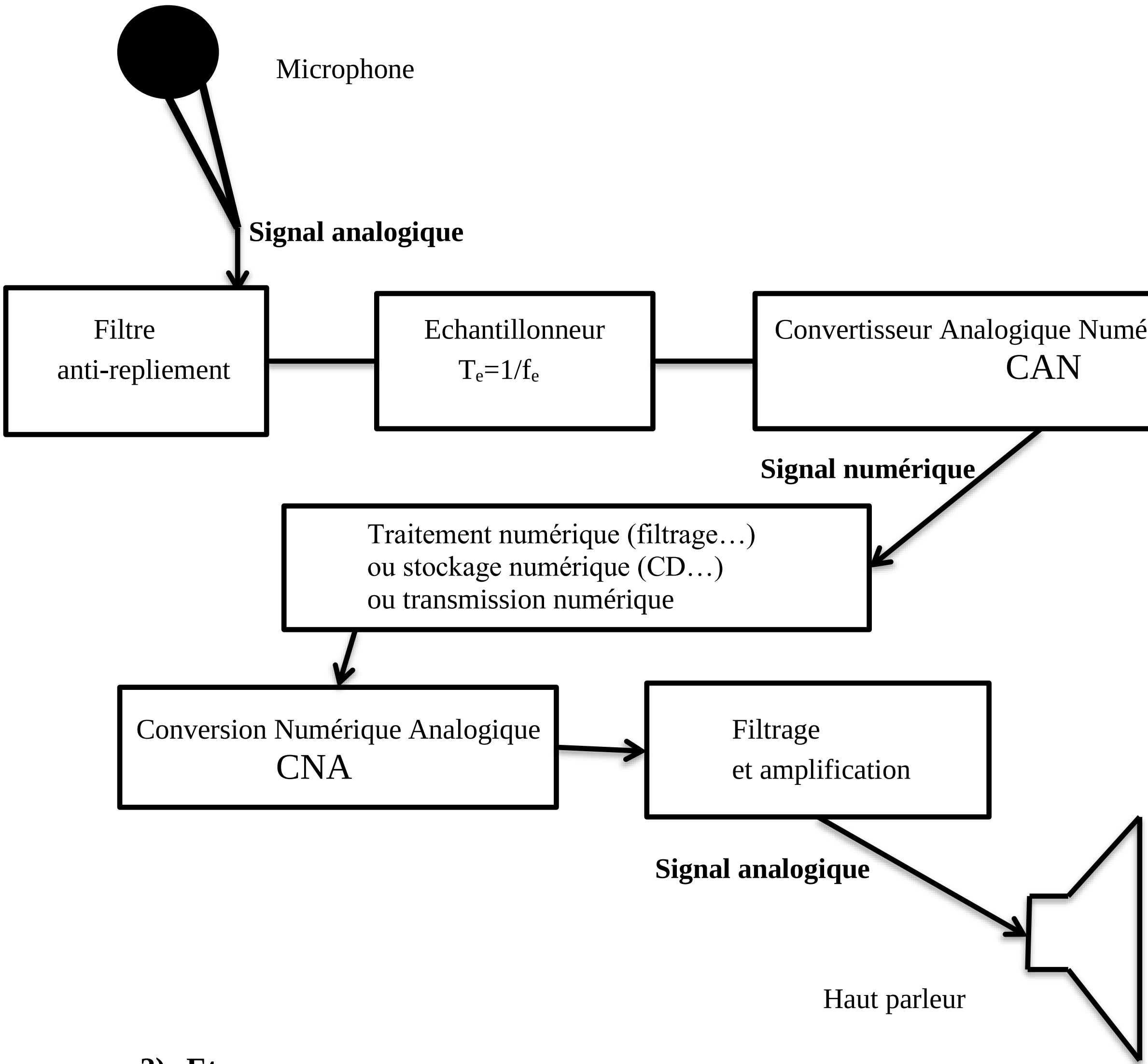
Ch TS3 : Echantillonnage et filtrage numérique

Poly à trous

I. Chaîne de traitement numérique du signal

1) Exemple : chaîne de traitement numérique du son



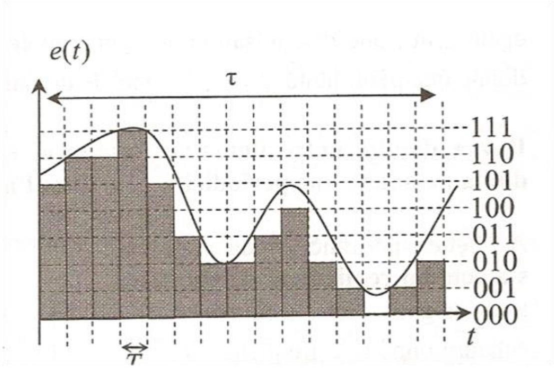
2) Etapes

- **Un signal analogique X(t) est un signal qui varie continument en fonction du temps**.
  X(t) est un signal **à temps** **et à valeurs**

  Echantillonnage : il consiste à prendre de façon périodique des valeurs sur ce signal appelées
  T_e est appelée période d'échantillonnage, c'est la durée entre deux échantillons.
  $F_e=1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage, c'est le nombre d'échantillons par seconde.
  On obtient un **signal échantillonné** $X_e(t)$ à temps discret (car il n'est connu qu'à des temps multiples de la période d'échantillonnage).

- **Numérisation** par un convertisseur analogique-numérique (**CAN**).
  Un signal numérique X(n) est un signal à temps **et à valeurs** **(car son amplitude évolue par paliers).**
  Le signal est donc quantifié puis codé en binaire.

Un convertisseur p bits peut donc produire 2^p niveaux de quantification différents.
Exemple d'un CAN 3 bits :



On observe 2^3=8 niveaux de quantification

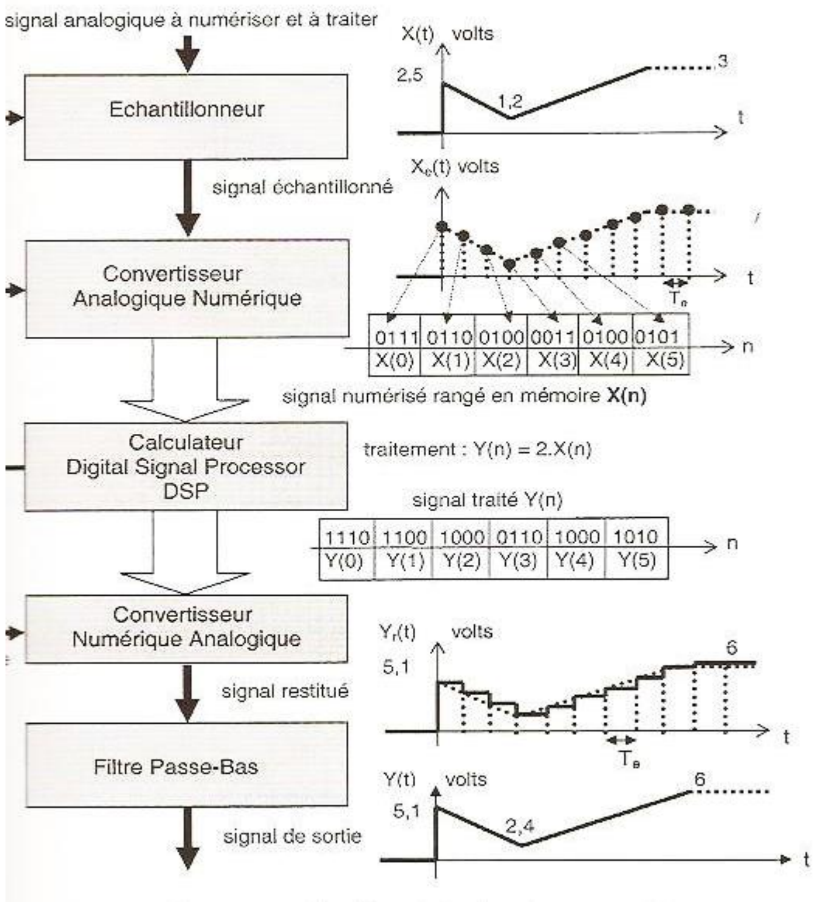
- **Traitement numérique** sur le signal X(n) : filtrage numérique, l'écho et la réverbération pour un signal sonore… On obtient un nouveau signal numérique Y(n).

- **Conversion numérique-analogique** (**CNA**). On obtient un signal $Y_r(t)$ qui se présente comme une succession de « marches » de durée T_e dont l'amplitude est proportionnelle à Y(n).

- **Lissage (filtrage passe-bas) :** Pour parfaire la forme du signal, on procède à un filtrage analogique passe-bas qui supprime la forme en marches d'escalier. On obtient un signal plus lisse Y(t).

3) <u>Chaîne complète</u>

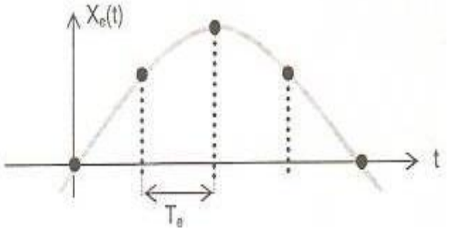
Exemple du traitement Y(t)=2*X(t) :



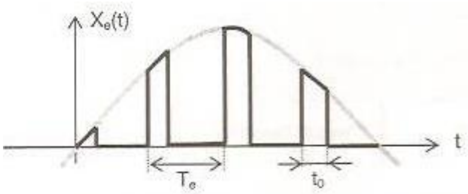
II. Echantillonnage

1) Echantillonnage idéal

Il consiste à prendre des valeurs
à des instants précis :



En pratique, les échantillons ont
une certaine durée t_0 :

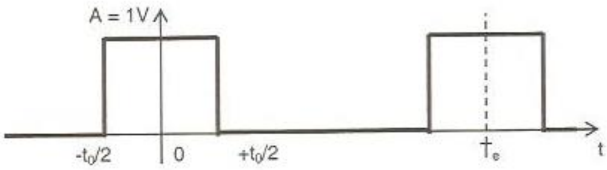


2) Spectre du signal échantillonné

Le signal échantillonné est obtenu en multipliant le signal d'entrée X(t) par un signal de commande K(t).

<u>Rem : Signal de commande réel :</u>

Ce sont des impulsions de durée t_0 espacées de T_e :

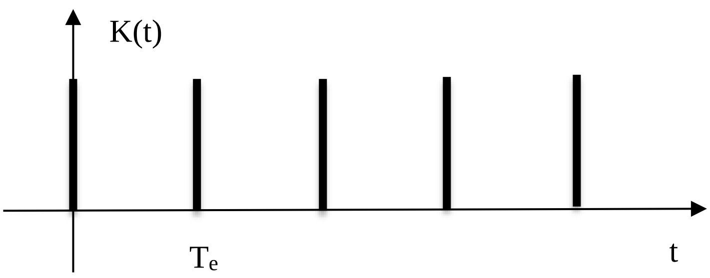


Sa décomposition en séries de Fourier est : $K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)$

Avec $K_m = 2\frac{At_0}{T_e}\frac{\sin(\pi m F_e t_0)}{m\pi F_e t_0}$

<u>Cas d'un signal de commande idéal :</u>

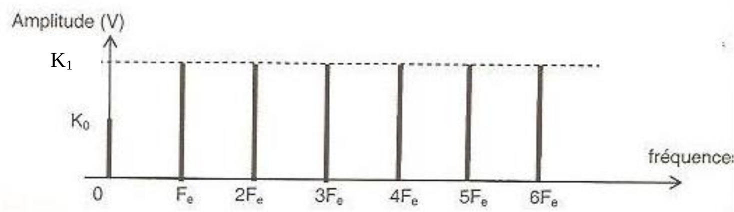
C'est le cas idéal où $t_0 \ll T_e$.
Le signal de commande est un peigne de Dirac.



Alors $K_m = 2\frac{At_0}{T_e}\frac{\sin(\pi m F_e t_0)}{m\pi F_e t_0} \approx 2\frac{At_0}{T_e} \approx cte$
est indépendant de m.

$$K(t) = K_0 + K_1\sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m F_e t)$$

Le spectre est formé de raies de même amplitude :



<u>Signal échantillonné :</u>

* C'est le produit du signal d'entrée analogique X(t) par le signal de commande K(t) :
$X_e(t)$ =

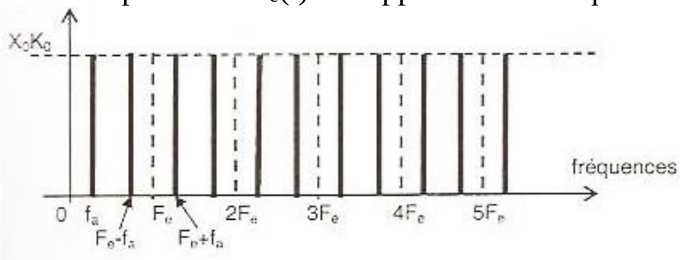
* Si le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de fréquence f_a : $X(t) = A.\cos(2\pi f_a t)$:

K(t) est décomposable en série de Fourier $K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)$

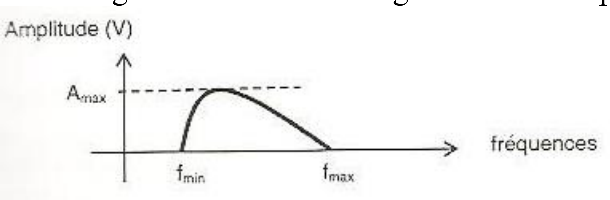
Donc $X_e(t) = A\cos(2\pi f_a t)[K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)]$

or $\cos(2\pi f_a t)\cos(2\pi m F_e t) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi(f_a + mF_e)t) + \cos(2\pi(mF_e - f_a)t)\right]$

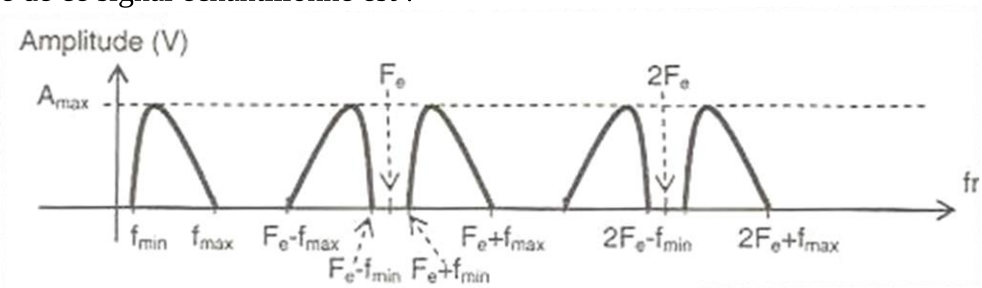
Donc le spectre de $X_e(t)$ fait apparaître les fréquences



* Si le signal d'entrée est un signal sonore de spectre continu :



Le spectre de ce signal échantillonné est :

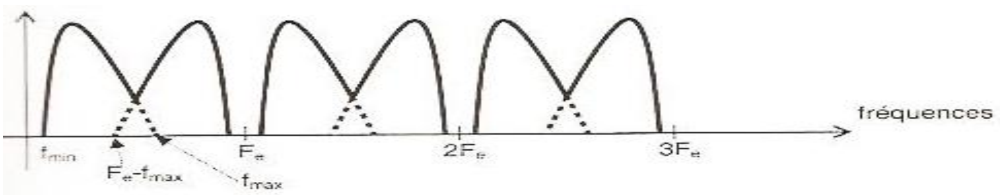


CE : Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.

Lors de la conversion numérique-analogique, pour restituer uniquement le spectre du signal de sortie, il faudra supprimer toutes les fréquences supérieures à f_{max} (ou $F_e/2$ si Fe est bien choisie) à l'aide d'un filtre passe-bas appelé filtre de restitution (c'est le filtre de lissage).

3) Condition de Nyquist-Shannon

Si on diminue la fréquence d'échantillonnage F_e, F_e-f_{max} va se rapprocher de f_{max}. Il peut même y avoir un recouvrement, c'est le phénomène de **repliement de spectre** :



Alors aucun filtrage passe-bas ne permettra de retrouver le signal d'origine.

Donc pour que l'échantillonnage ne déforme pas le signal il faut vérifier la condition

ou $F_e >$

Cela correspond **au minimum à**

C'est la **condition de Nyquist-Shannon :**

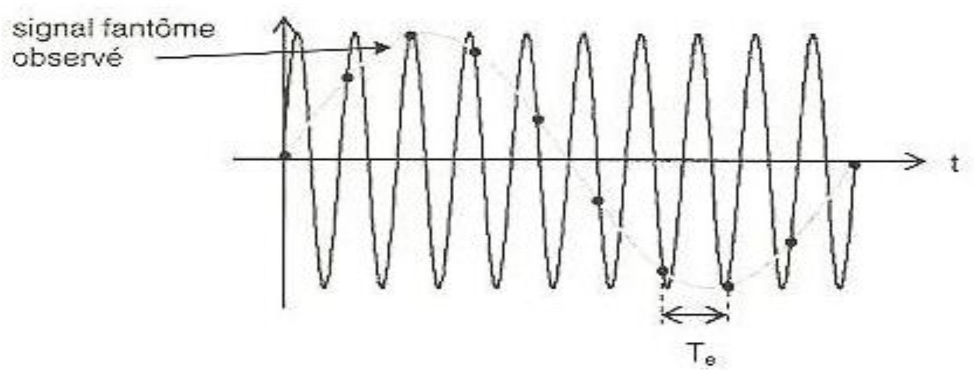
Lorsqu'on échantillonne un signal analogique de fréquence maximale f_{max}, il faut prendre au moins échantillons par seconde : $F_e >$

CE : Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.

Le repliement de spectre, dû au non-respect du critère de Shannon, se traduit par une perte d'information sur le signal d'origine.

Conséquence d'un sous-échantillonnage (non-respect de ce critère de Shannon) :

Le calculateur voit un signal fantôme qui n'a pas la même fréquence que le signal d'entrée, c'est ce qu'on appelle un phénomène de stroboscopie :



Illustrations visuelles de l'effet stroboscopique en cours.

Filtre anti-repliement : Pour éviter le recouvrement de spectre il faut respecter la condition de Nyquist-Shannon mais on peut aussi rajouter systématiquement à l'entrée du convertisseur un **filtre anti-repliement** qui va limiter la fréquence du signal d'entrée à

4) Choix des paramètres d'une acquisition numérique

Il y a 2 paramètres à choisir : la période d'échantillonnage T_e et le durée d'acquisition τ. On en déduit le nombre de points d'acquisition $N=\tau/T_e$.

- T_e doit **respecter la condition de Shannon** : $F_e>2.f_{max}$ donc on a intérêt à prendre la fréquence d'échantillonnage F_e la plus
- La durée d'acquisition τ doit être la plus : toute la durée du concert si on veut enregistrer un concert, de plus lors d'une analyse spectrale **la résolution du spectre est de $1/\tau$** (écart minimal entre 2 fréquences du spectre calculé).
- Les 2 critères précédents tendent à augmenter le nombre de points d'acquisition $N=\tau/T_e$ mais on est **limité par les capacités de stockage ou le débit de la transmission**. Il faut donc trouver un compromis.

Exemple :

- Un internaute souhaite écouter de la musique en « streaming ». Il dispose d'un débit de 1Mb/s. Etant amateur de HiFi (restitution haute fidélité avec encodage sur 16 bits, sans compression, en stéréo donc sur deux canaux, et comportant la totalité du spectre audible), il souhaite calculer si son débit est suffisant. Pouvez-vous l'aider ?

- Il constate qu'il peut téléphoner sans problème avec sa connexion internet. La fréquence d'échantillonnage est de 8kHz avec une quantification sur 8 bits sur 1 canal. Calculer le débit nécessaire correspondant. Que devient un son de 7 kHz (donc audible) après échantillonnage ? Quelle solution proposez-vous ?

III. Filtrage numérique

CE expérimentale : Mettre en œuvre un convertisseur analogique-numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique-analogique pour restituer un signal analogique.
CE numérique : A l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

1) Filtre passe-bas du premier ordre : passage de l'équation différentielle à l'équation aux différences (ou équation de récurrence)

Un filtre passe-bas analogique d'ordre 1 est un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$

donc qui est régit par l'équation différentielle : $\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{ds}{dt} + s = e$

où ω_c est sa pulsation de coupure.

Méthode d'Euler (ou méthode des différences finies) :

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 : $s(t) = s(t - T_e) + T_e \frac{ds}{dt} + o(T_e)$
Pour T_e faible on en déduit une approximation de la dérivée : $\frac{ds}{dt} \approx \frac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$
Avec $t = n.T_e$, on passe aux signaux numériques : $s(n.T_e) = s[n]$
D'où l'approximation de la dérivée : $\frac{ds}{dt} \approx \frac{s[n] - s[n-1]}{T_e}$
L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{s[n] - s[n-1]}{\omega_c T_e} + s[n] = e[n]$$

Un filtre numérique passe-bas d'ordre 1 est régi par **l'équation aux différences** :

$s[n] = b_0\, e[n] - a_1\, s[n-1]$ avec

$a_1 =$ et $b_0 =$

C'est la méthode qui sera mise en œuvre en TP (TP « Filtrage numérique »). L'algorithme du filtre passe-bas sera programmé avec le langage Python.

Pour s'entrainer : chercher l'équation aux différences d'un filtre passe-haut du premier ordre.

2) Deuxième méthode : moyenne glissante

Pour réaliser un filtrage passe-bas, on peut aussi additionner un nombre n d'échantillons successifs et diviser par n, ce qui réalise une « moyenne glissante » donc un filtrage passe-bas. Par exemple :

$s[n] =$

Cette deuxième méthode sera aussi mise en œuvre dans le TP « Filtrage numérique ».

3) Filtre d'ordre 2

Discrétisation de la dérivée seconde :

Par la formule de Taylor, $s(t) = s(t - T_e) + \qquad + o(T_e^2)$

$$s(t - 2T_e) = s(t - T_e) - \qquad + o(T_e^2)$$

Si on somme ces formules, $s(t) + s(t - 2T_e) =$

On en déduit une approximation de la dérivée seconde pour T_e faible : $\frac{d^2s}{dt^2} \approx$

D'où la discrétisation de la dérivée seconde : $\frac{d^2s}{dt^2} \approx \frac{s[n]+s[n-2]-2s[n-1]}{T_e^2}$

Equation aux différences d'un filtre passe-bas d'ordre 2 :

Fonction de transfert réduite $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Equation différentielle :

On utilise la discrétisation des dérivées premières et secondes :

D'où l'équation aux différences :

$s[n] =$