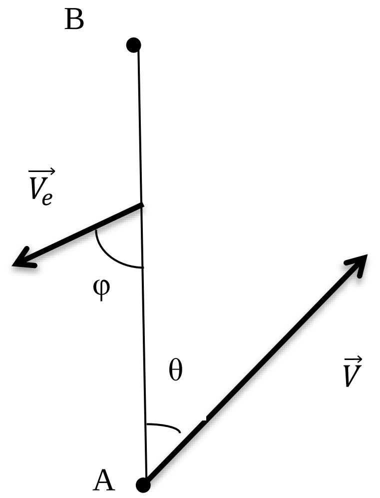
TD-M1 - Référentiels non galiléens

Exercice 1* : Avion confronté à un vent contraire

Un avion doit se déplacer en ligne droite d'un point A vers un point B au sol. Il subit un vent contraire de vitesse v_e dans le référentiel du sol noté R. Le vecteur $\overrightarrow{v_e}$ fait un angle φ avec la trajectoire AB. L'avion vole à une vitesse constante $\vec{V}$ par rapport à l'air. Cette vitesse fait un angle θ avec la route au sol AB.



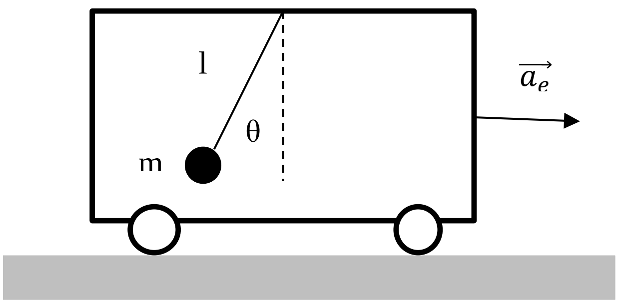
1.a) Exprimer la vitesse $\overrightarrow{v_a}$ de l'avion dans R.
1.b) A quelle condition l'avion peut-il se déplacer en ligne droite de A à B ?
1.c) Calculer l'angle de correction que le pilote doit afficher dans le cas où $V=445 km.h^{-1}$, pour contrer un vent de vitesse $v_e=56 km.h^{-1}$ et de direction φ=20°.

2) L'avion doit faire un aller-retour entre les deux points A et B distants de d=500km, dans les conditions de la question précédente.

a) Calculer la durée t_{ar} du trajet aller-retour. On négligera la durée du demi-tour.
b) Comparer cette durée avec le temps t'_{ar} qu'aurait mis l'avion pour faire le même trajet en l'absence de vent. Est-il possible que $t_{ar} < t'_{ar}$?
Commenter cette maxime de l'aéronautique : « Le temps perdu ne se rattrape jamais ».

Exercice 2**♥ : Objet suspendu dans un véhicule

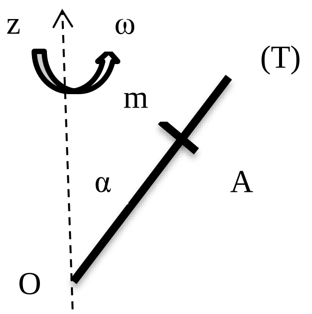
Un véhicule a une accélération horizontale $a_e = 1$ m.s^{-2} par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Un pendule simple de longueur l et de masse m est suspendu au toit du véhicule.



1) Quelle est l'équation du mouvement du pendule ?
2) Quelle est l'inclinaison θ_e du pendule à l'équilibre ?
3) Exprimer la période des petites oscillations autour de θ_e.

Exercice 3**♥ : Position d'équilibre et stabilité

On considère une tige T qui tourne autour d'un axe vertical Oz à la vitesse angulaire ω constante.
L'angle entre la tige et l'axe (Oz) a une valeur fixée α .
Sur cette tige est enfilé un anneau A de masse m et de petite taille qui coulisse le long de T sans frottement.



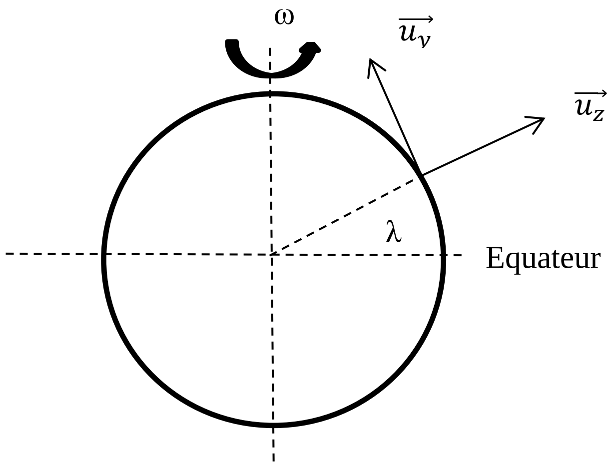
1) Faire un bilan des actions qui s'exercent sur l'anneau dans le référentiel tournant avec la tige autour de (Oz).
2) En projetant le principe fondamental de la dynamique sur la direction de la tige, trouver la ou les positions d'équilibre possible.
3) En envisageant un petit décalage par rapport à la ou les positions trouvées, étudier la stabilité de l'équilibre.
4) Montrer que toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle.
5) Par une méthode énergétique, retrouver la ou les positions d'équilibre de l'anneau et leur stabilité.

Exercice 4* : Force de Coriolis sur un train

Un train à grande vitesse de masse m=7,8.10^5 kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante v=300km.h^{-1}. A l'instant considéré il se trouve à la hauteur de Valence à la latitude λ=45° nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée directe avec $\overrightarrow{u_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{u_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{u_z}$ vers le haut.

1) Faire un schéma où apparaissent la Terre en coupe, la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2) Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train.
3) Faire un schéma en coupe du train vu de l'arrière et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

Exercice 5***♥ : Déviation vers l'est



Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une altitude h depuis un lieu de latitude λ. Le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ pointe vers l'est, $\overrightarrow{u_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{u_z}$ vers le haut. Le poids est suivant -$\overrightarrow{u_z}$.

1) Faire un bilan des forces exercées sur le mobile dans le référentiel terrestre (ne pas oublier la force de Coriolis).
2) Ecrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur les trois vecteurs de base.

On cherche à résoudre ce système de manière perturbative.

3) Selon quelle direction la vitesse est-elle non nulle en l'absence de rotation terrestre ? Intégrer deux fois l'équation obtenue dans le cadre de cette approximation.
4) On s'intéresse aux accélérations projetées sur les deux autres directions. Expliquer pourquoi l'une de ces projections est nettement supérieure à l'autre.
5) Calculer alors cette accélération puis la vitesse associée en utilisant les résultats du 3).
6) En déduire qu'au moment de toucher le sol la masse a légèrement dévié vers l'est.
7) Faire l'application numérique pour h=158m, λ=50° et g=9,8m.s^{-2}.
8) Ferdinand Reich a mesuré en 1833, à la latitude λ=50°, pour une masse tombant dans un puit de profondeur h=158m, une déviation vers l'est de 28mm. Qu'en pensez-vous ?

Réponses :

Ex 1 : 1) $\theta = 0{,}043$ rad
2) a) $t_{ar} = 2{,}28$ h
b) $t'_{ar} = 2{,}25$ h

Ex 2 : 1) $l\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) + a_e\cos(\theta)$
2) $\tan(\theta_e)=a_e/g$ 3) $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2+{a_e}^2}}$

Ex 3 : 2) $x_e = g.\cos(\alpha)/(\omega.\sin(\alpha))^2$
3) $\ddot{\varepsilon} - \omega^2\sin^2(\alpha)\varepsilon = 0$ avec $\varepsilon = x - x_e$ et $|\varepsilon|<<1$
3) $Ep_{totale} = -\frac{1}{2}m\omega^2x^2\sin^2(\alpha) + mgx\cos(\alpha) + cte$

Ex 4 : 2) $\overrightarrow{F_C} = -2m\omega v\sin(\lambda)\overrightarrow{u_x}$ $F_c/mg = 9.10^{-4}$
3) Le rail de droite s'use le plus vite

Ex 5 : 2) $\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin(\lambda) - \dot{z}\cos(\lambda))$ $\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin(\lambda)$ $\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos(\lambda)$
3) Si $\omega=0$, $z = h - gt^2/2$
6) Déviation vers l'est $\Delta x = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos(\lambda)$
7) $\Delta x = 2{,}8$cm