



RAPPELS SUR LES S.L.C.I

Cours

v1.1

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

1 Objectifs	5
2 Automatique	5
3 Asservissement	5
3.1 Système commandé	6
3.2 Modélisation des perturbations	6
3.3 Fonction de transfert en poursuite et en régulation	6
3.4 Du système commandé au système asservi	7
3.5 Commande directe/asservi	7
4 Modèle et modélisation	10
4.1 Modèle	10
4.2 Modélisation	10
4.3 Objectifs de la modélisation	10
5 SLCI : système linéaire, continu et invariant	13
5.1 Défauts et hypothèses de modélisation	14
6 Modélisation des SLCI	16
6.1 Modèle de connaissance et de comportement	16
6.2 Systèmes modélisables par un gain pur	16
6.3 Systèmes modélisés par un intégrateur	17
6.4 Systèmes électriques et électromécaniques	17
6.5 Équation générale des systèmes linéaires	18
7 Propriétés et définition de la transformation de Laplace	20
7.1 Linéarité	20

7.2	Transformée de Laplace d'une dérivée	20
7.3	Transformée de Laplace d'une primitive	20
7.4	Propriétés de changement d'échelle	20
7.5	Théorème du retard	20
7.6	Théorème de la valeur initiale	21
7.7	Théorème de la valeur finale	21
7.8	Propriétés diverses	21
8	Transformées de Laplace de quelques signaux usuels	21
9	Fonction de transfert d'un système linéaire	22
9.1	Pôles et racines d'une fonction de transfert	22
9.2	Classe d'un système	22
10	Conditions d'Heaviside	22
11	Modélisation par schéma-blocs	25
11.1	Description de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot	26
12	Manipulations de blocs	26
12.1	Fonction de transfert globale	26
12.2	Association de blocs en série	27
12.3	Association de blocs en parallèle	27
12.4	Déplacement de bloc	27
13	Boucle ouverte, boucle fermée, formule de Black	28
14	Ordre et classe d'un système asservi	29
15	Système asservi à retour unitaire	30
16	Erreur et écart	31
16.1	Erreur et écart dynamique ou statique	31
17	Exemple : le moteur à courant continu	31
18	Transformée de Laplace directe et inverse	34
18.1	Décomposition en éléments simples	34
19	Système d'ordre 1	35

19.1 Réponse impulsionnelle	36
19.2 Réponse indicielle	36
19.3 Réponse à une rampe unitaire	38
20 Système d'ordre 2	38
20.1 Réponse indicielle	39
21 Décomposition en série de Fourier	44
22 Étude harmonique	44
22.1 Régime sinusoïdal permanent $\Leftrightarrow p = j\omega$	45
22.2 Transmittance complexe	46
22.3 Réponse à une entrée sinusoïdale d'un système du 1 ^{er} ordre	47
23 Gain et déphasage temporel d'une étude harmonique	47
23.1 Mesure du gain	47
23.2 Mesure du déphasage	48
24 Représentation complexe	49
24.1 Gain et déphasage d'une fonction de transfert du premier ordre	49
25 Représentation graphique du comportement harmonique	50
25.1 Échelle logarithmique	50
25.2 Diagramme de Bode	50
25.3 Tracés asymptotiques du diagramme de Bode	51
25.4 Propriétés des diagrammes de Bode	52
25.5 Bande Passante	52
26 Diagrammes de Bode asymptotiques de FT élémentaires	53
27 Approximation	54
28 Identification temporelle	56
28.1 Système du premier ordre	56
28.2 Système du second ordre	57
29 Identification fréquentielle	59
29.1 Système du premier ordre	60
29.2 Système du second ordre, de classe une	61

29.3 Système du second ordre de classe zéro	62
29.4 Système du second ordre, de classe zéro	63

1 Objectifs

Le but de ce chapitre est de revoir brièvement le programme de première année concernant l'étude des systèmes asservis.

2 Automatique

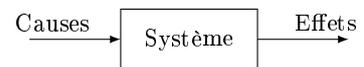
L'automatique est une science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques.



Définition *Système automatisé*

Un système technique *automatique* ou *automatisé* est un système assurant des opérations avec peu ou sans intervention humaine dans sa phase de vie d'utilisation (cas d'utilisation hors programmation et/ou réglage du système).

Les *entrées*, appelées *causes*, sont des grandeurs issues du milieu extérieur. Les *sorties*, appelées *effets*, fournissent la réponse du système à la ou les causes.



Les objectifs de ces systèmes automatisés sont de réaliser des tâches trop complexes ou dangereuses pour l'Homme, voire irréalisables (inspection des canalisations de centrale nucléaire - robot TRIBAR), de réaliser des tâches pénibles et/ou répétitives (assemblage de pièces dans l'industrie, conditionnement de produits - robot FLEXPICKER), d'accroître la précision des tâches (robot chirurgical) ...

3 Asservissement

Si nous prenons un moteur à courant continu et que nous l'alimentons avec une tension continue U à ses bornes, il tournera à une vitesse ω . Cependant si nous ajoutons un cylindre de masse m et d'inertie J à l'arbre de sortie moteur : l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur est modifiée et le temps pour atteindre la vitesse finale ω sera plus élevé et le couple de frottement sec C_{fs} (couple résistant) va augmenter et la vitesse finale ω' sera plus faible $\omega' < \omega$.

Une perturbation extérieure ou une modification physique du système ne permet pas de garantir une sortie (vitesse de rotation du moteur) constante pour une entrée (tension d'alimentation) constante. Une autre manière de le voir est :

$$\text{On voudrait } \omega = f(U) \quad \text{or, on a } \omega = f(U, J, C_{fs}, \dots)$$

En automatique, un asservissement est un système dont l'objet principal est d'atteindre le plus rapidement possible sa valeur de consigne et de la maintenir, quelles que soient les perturbations externes. Le principe général est de comparer la consigne et l'état du système de manière à le corriger efficacement. On parle également de système commandé en boucle fermée (ou FTBF).

Le principe de base d'un asservissement est de mesurer, en permanence, l'écart entre la valeur réelle de la grandeur à asservir et la valeur de consigne que l'on désire atteindre, et de calculer la commande appropriée à appliquer à un (ou des) actionneur(s) de façon à réduire cet écart le plus rapidement possible.

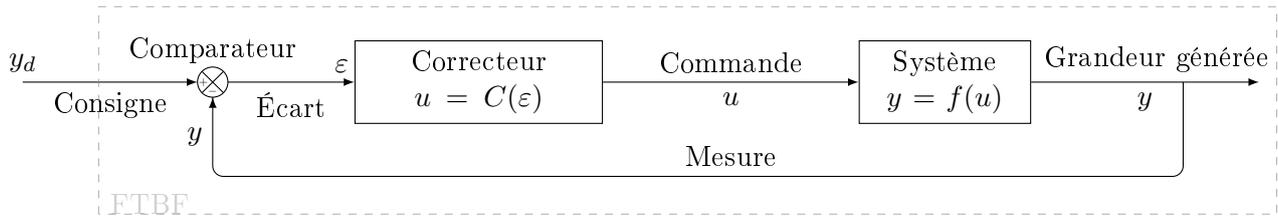


FIGURE 1 – Système asservi (en boucle fermée).

3.1 Système commandé



Définition *Système commandé*

Un *système commandé* est un système auquel un utilisateur délivre une grandeur d'entrée (commande) en vue de générer une grandeur de sortie (*c.f.* FIGURE 2).

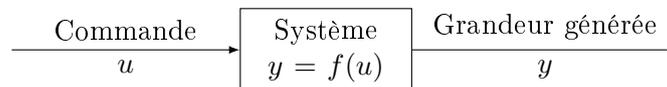


FIGURE 2 – Système commandé (en boucle ouverte).

3.2 Modélisation des perturbations

Le système peut être soumis à des perturbations, la sortie est donc modifiée et ne correspond plus à la grandeur attendue pour une entrée donnée.



Définition *Perturbation*

On appelle *perturbation*, toute cause susceptible de modifier la sortie, indépendamment de la commande (*c.f.* FIGURE 3).

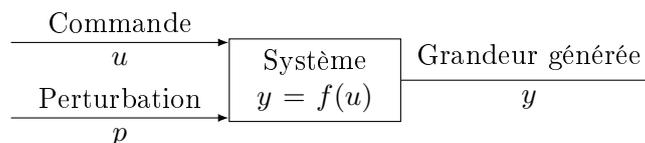


FIGURE 3 – Le système commandé comme système multi-variables.

3.3 Fonction de transfert en poursuite et en régulation

Pour prendre en compte une perturbation, on cherche à décrire un système sous la forme d'un schéma-bloc, de la forme $F_1(p)$ et $F_2(p)$ étant des fonctions de transfert caractérisant le système (*c.f.* FIGURE 4).

Que l'on peut écrire à l'aide de deux fonction de transfert, selon l'expression suivante :

$$\text{Grandeur générée} = \text{Commande} \times FT_{\text{poursuite}}(p) + \text{Perturbation} \times FT_{\text{régulation}}(p)$$

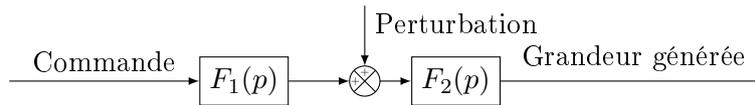


FIGURE 4 – Principe de modélisation d'une perturbation.

- **poursuite** : on poursuit une consigne (donc en se plaçant à perturbation nulle) ;
- **régulation** : on règle une perturbation (donc en se plaçant à consigne nulle).

3.4 Du système commandé au système asservi

On souhaite rendre un système insensible aux perturbations. Pour cela, l'idée directrice est de rendre la commande du système indépendante de l'utilisateur, qu'elle puisse s'adapter aux variations de sortie dues aux perturbations. On arrive ainsi à la notion de système asservi.



Définition *Système asservi*

On appelle *système asservi*, un système dont la commande est générée de manière autonome, indépendamment de l'utilisateur, à partir d'une référence et d'images de la sortie effective ou de grandeurs internes.

On appelle *consigne*, le signal envoyé au système asservi. Elle est homogène à la grandeur de sortie et définit la sortie souhaitée.

Le *régulateur* élabore l'ordre de commande à partir de la consigne et de la mesure. Il se compose :

- d'un *comparateur*, chargé d'élaborer la fonction écart : $\varepsilon(t) = y_{\text{adapt.}}(t) - y_{\text{capt.}}(t)$.
 $y_{\text{adapt.}}(t)$ et $y_{\text{capt.}}(t)$ sont des grandeurs homogènes ;
- d'un *correcteur* qui a pour fonction de corriger le signal écart en effectuant un certain nombre d'opérations (amplification, intégration, etc.) en ayant pour objectif de faire en sorte que la sortie soit fidèle à l'entrée, quelles que soient les actions perturbatrices.

On appelle *capteur*, l'élément qui délivre un signal de retour image de la grandeur de sortie observée.‘

Voici un schéma de principe (*c.f.* FIGURE 5) et un schéma type (*c.f.* FIGURE 6) d'un système asservi.

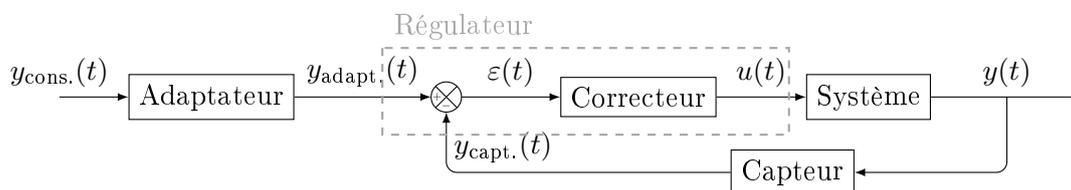


FIGURE 5 – Schéma de principe d'un système asservi, sans perturbations.

3.5 Commande directe/asservi

Un système bien conçu peut être tout à fait satisfaisant du point de vue de son comportement s'il n'est pas perturbé. C'est l'utilisateur qui commande directement le système en fonction de son ressenti

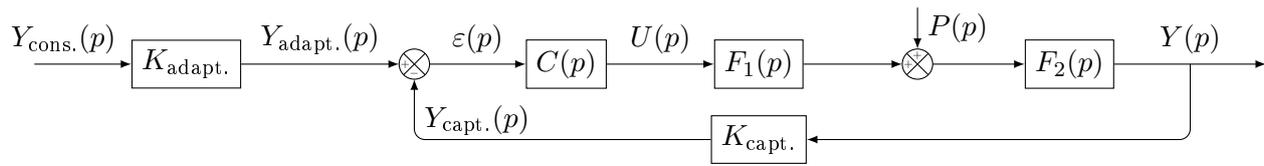
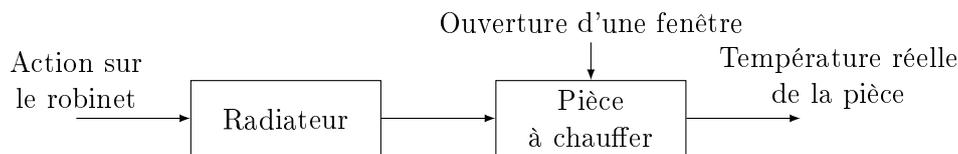


FIGURE 6 – Schéma type d'un système asservi, avec une perturbation.

(le système n'est donc pas automatisé). On dit alors que la commande est en boucle ouverte ou en commande directe.

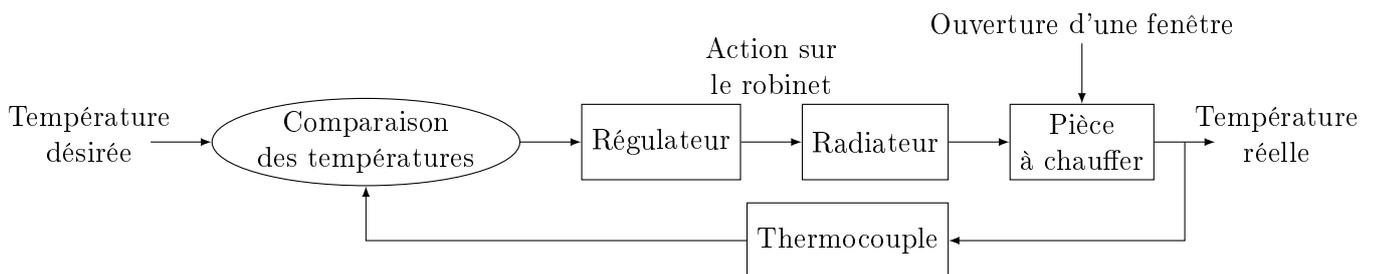
Pendant lorsque le système est perturbé par un événement extérieur (appelé perturbation), la valeur de la sortie ne correspond pas à la valeur attendue et peut être très éloignée de cette valeur.



Pour automatiser le système sans intervention humaine (sans action permanente sur le robinet dans l'exemple), on introduit une boucle de retour (ou rétroaction). Le système est alors dit en *boucle fermée*.

La boucle de retour, constituée de capteur, permet d'évaluer la situation à chaque instant et fournit un état de la sortie (grandeur qui nous intéresse) à la partie commande. Cette information est analysée par la partie commande et comparée à la consigne. Cette dernière élabore alors un signal qui permet de commander la partie opérative.

Lorsque la boucle de retour est constituée d'un capteur, que l'information délivrée par ce capteur est utilisée et que la nature de la grandeur de sortie est identique à celle de consigne, on parle d'*asservissement*. Il existe des systèmes qui sont physiquement et naturellement bouclés (moteur, vérin...), c'est-à-dire que la boucle de retour ne correspond pas à un capteur ajouté par l'Homme. Dans ces conditions, on parle juste de *boucle fermée* mais pas d'asservissement.



Dans cet exemple, la température désirée, appelée consigne (température souhaitée et fixée par un thermostat), est comparée à la température réelle de la pièce mesurée par le thermocouple. Le régulateur déclenche alors une action correctrice, dont le sens de variation et l'amplitude de l'action sur le robinet dépendent de l'écart entre la température désirée et la température réelle de la pièce.

Le schéma FIGURE 7 synthétise la structure d'un système asservi.

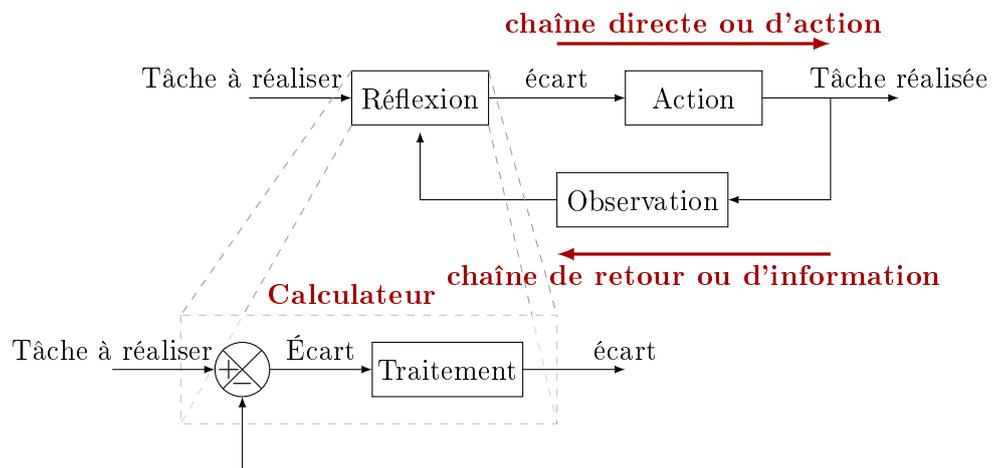


FIGURE 7 – Représentation schématique d'un système asservi

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
AUTOMATIQUE ET ASSERVISSEMENT**Automatique**

Un système automatisé est un système assurant des opération sans intervention humaine.

- Un système possède
 - ◊ en *entrée*, une grandeur issue du milieu extérieur : c'est la *cause* ;
 - ◊ en *sortie*, la réponse du système : c'est l'*effet*.

Asservissement

- Un système commandé est modifié par :
 - ◊ une énergie de commande ;
 - ◊ une énergie de perturbation.
- Lorsque l'on s'intéresse à la commande uniquement, on étudie la fonction de transfert dite de *poursuite*. Lorsque l'on s'intéresse à la perturbation uniquement, on étudie la fonction de transfert dite de *régulation* ;
- Un système asservi est composé de :
 - ◊ d'un signal de *consigne* ;
 - ◊ d'un *régulateur* (*comparateur et correcteur*) ;
 - ◊ d'un *capteur* qui renvoie un signal de *mesure*, image de la grandeur générée.
- La *chaîne directe* est la partie *puissance*, la *chaîne de retour* est la partie *information*.

4 Modèle et modélisation

4.1 Modèle

“ Dès que l'on dépasse la description pour aborder l'analyse des processus, celle-ci implique une référence à un modèle, dont la définition doit être d'autant plus précise que les raisonnements qu'on lui applique sont plus élaborés... Le modèle est une représentation schématique d'un objet ou d'un processus qui permet de substituer un système plus simple au système naturel.”

– J. GOGUEL, Encyclopédia Universalis

4.2 Modélisation

“ La modélisation consiste à construire et à utiliser un modèle qui est une représentation simplifiée de la réalité pour montrer les aspects importants du système étudié.”

– Office québécois de la langue française, 2005

4.3 Objectifs de la modélisation

L'objectif principal de la modélisation est de permettre de prévoir le comportement d'un système. Pour cela, il est nécessaire de :

- proposer une modélisation des variables d'entrée (consignes, perturbations ...);
- modéliser le système global;
- simuler le comportement du système (à la main ou par ordinateur);
- analyser les résultats de la simulation du comportement du système (c'est à dire analyser l'évolution de la sortie du système).

Pour analyser correctement la réponse (l'évolution de la sortie) du système simulé, il faut :

- comparer les résultats obtenus par simulation à des résultats expérimentaux;
- valider les performances obtenues par rapport au Cahier des Charges (on rappelle que le cahier des charges contient les critères de performances du système).

4.3.1 Signaux d'entrée élémentaires

Pour étudier le comportement dynamique d'un système, il n'est pas toujours simple de traduire sous forme d'équations les lois de la physique qui régissent son comportement. Il est souvent plus efficace de le soumettre à des signaux tests et d'observer sa sortie. De plus, la définition des critères de performances se fait majoritairement à partir de ces signaux.

On se propose ici de présenter les signaux les plus couramment utilisés.



Définition Impulsion de Dirac

si $t \neq 0$, $\delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

La réponse temporelle d'un système ou d'un modèle à un Dirac est appelée *réponse impulsionnelle*.

L'impulsion de Dirac est une entrée qui modélise une excitation du système sur un temps extrêmement court, au regard du temps d'observation, mais suffisamment significatif pour que les effets puissent être observables.

Exemple : coup de marteau sur une plaque métallique, frappe piquée sur une corde de piano...

Mathématiquement, l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution, définie comme nulle pour tout temps différent de zéro et telle que l'intégrale sur \mathbb{R} vaut 1. Son utilisation mathématique ne relève pas du programme de classes préparatoires et sera vu en détail en école d'ingénieurs ou en cursus L3. L'impulsion de Dirac peut néanmoins être considérée comme la limite d'un créneau $d(t)$ de largeur ε et de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro.



Définition Fonction échelon unité

$u(t)$: si $t < 0$, $u(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $u(t) = 1$.

La réponse temporelle d'un système ou d'un modèle à un échelon est appelée *réponse indicielle*.

Cette fonction respecte le principe de causalité, c'est-à-dire qu'elle est nulle pour les temps négatifs.

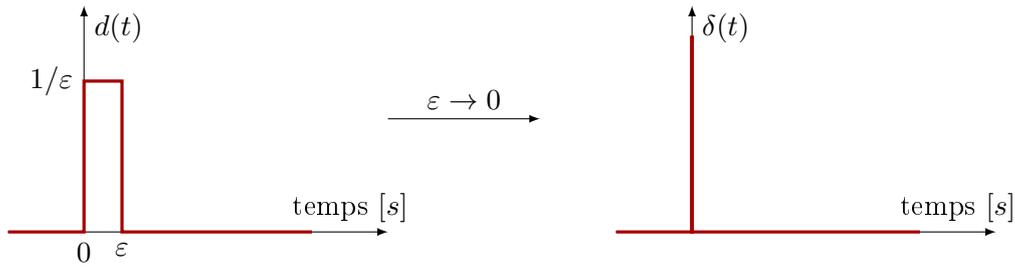


FIGURE 8 – Représentation temporelle de l'impulsion de Dirac.

tifs. En effet, l'ensemble des paramètres est supposé être au repos dans les temps négatifs.

Cette fonction modélise un signal qui passe de la valeur nulle à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constant égal à 1.

Exemple : fermeture d'un interrupteur électrique ...



Définition Fonction rampe unitaire

$r(t)$: si $t < 0$, $r(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $r(t) = t$. La fonction rampe peut s'exprimer à l'aide de la fonction échelon unitaire :

$$r(t) = t \cdot u(t).$$

Exemple : cette fonction modélise par exemple un déplacement imposé à vitesse constante.



Définition Fonction sinus causale

$s(t)$: si $t < 0$, $s(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $s(t) = \sin(\omega t)$.

Cette fonction peut être s'écrire en utilisant la fonction échelon unitaire :

$$s(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t).$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ est appelée pulsation du sinus, T période et f la fréquence.

Cette fonction caractérise une consigne oscillant à une fréquence précise. Elle présente surtout un intérêt théorique, qui sera développé dans la séquence sur l'analyse fréquentielle des SLCI.

4.3.2 Signaux composés de signaux élémentaires

Tout signal affine par morceaux peut s'écrire comme la somme de signaux élémentaires en utilisant des fonctions échelon et rampe, éventuellement retardées. Ces signaux composés sont souvent utilisés pour la commande des systèmes.

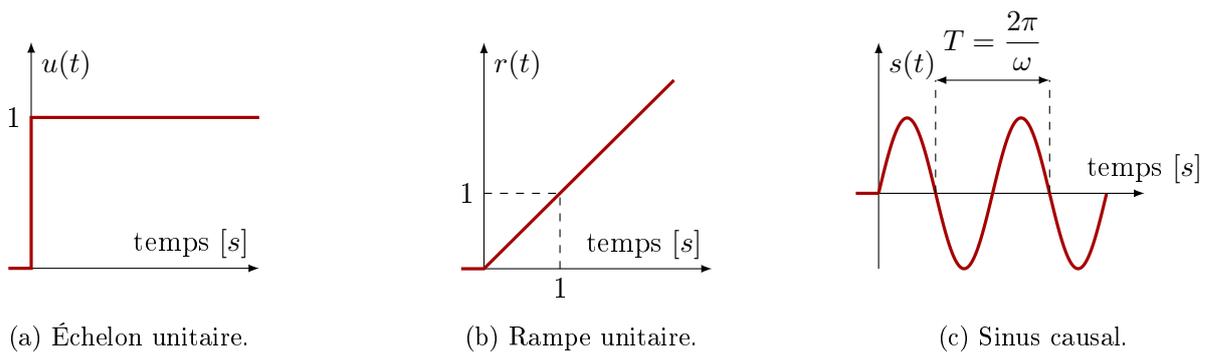


FIGURE 10 – Signaux d'entrée élémentaires.

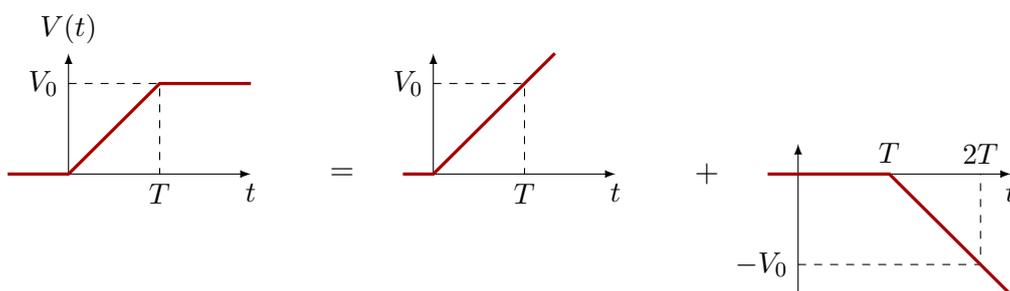


FIGURE 11 – Signal composé de deux rampes de coefficients opposés.

Ce signal peut être décomposé comme une somme de deux signaux élémentaires :

$$V(t) = \frac{V_0}{T} \times t \times u(t) - \frac{V_0}{T} \times (t - T) \times u(t - T)$$

où $u(t - T)$ est la fonction échelon retardée d'un temps T (la fonction passe à 1 à $t = T$).

5 SLCI : système linéaire, continu et invariant



Définition SLCI

Un *système linéaire* est un système qui conserve, à sa sortie, toute combinaison linéaire des signaux d'entrée (principe de proportionnalité et de superposition). On a une relation linéaire entre l'entrée et la sortie : $s(t) = a \times e(t)$, avec $a \in \mathbb{R}$ en régime établi (permanent).

Un *système continu* (ou système analogique) est un système dont les variations des grandeurs physiques qui le caractérisent sont des fonctions à temps continu et ces grandeurs sont définies à tout instant.

Un *système invariant* est un système dont les caractéristiques (masse, dimensions, résistance, ...) ne varient pas au cours du temps.

5.1 Défauts et hypothèses de modélisation

5.1.1 Linéarité

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'application. Cependant, dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine. Sous ces conditions, il est possible en général d'approcher le comportement par un modèle linéaire. Le système est dit alors linéarisé (*c.f.* FIGURE 13).

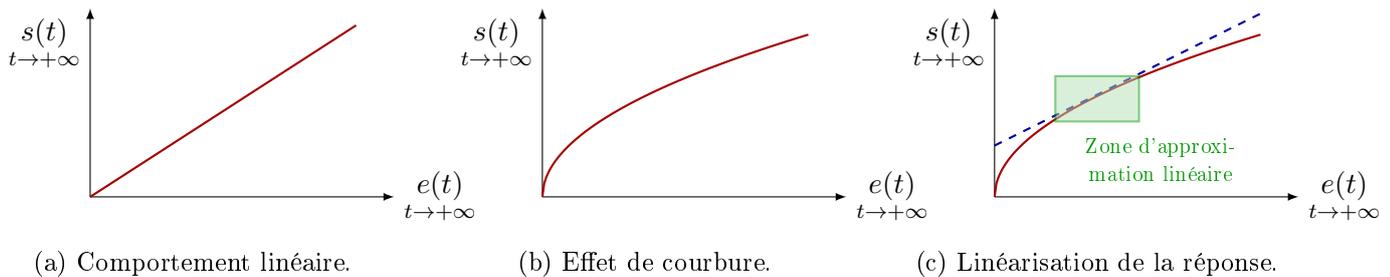


FIGURE 13 – Hypothèse de linéarité.

La notion de linéarité repose sur deux principes : le principe de *proportionnalité* et le principe de *superposition*.

$$\lambda e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow \lambda s(t) \qquad e(t) = \sum_i e_i(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t) = \sum_i s_i(t)$$

(a) Principe de proportionnalité. (b) Principe de superposition.

FIGURE 15 – Les deux principes de la notion de linéarité.

On recense quatre non-linéarités :

- la courbure qui traduit que des relations peuvent être assimilées à des relations affines, mais en réalité sont courbées (comme pour certaines lois entrée/sortie) ;
- l'effet de seuil, qui traduit souvent la présence de frottements ;
- l'effet de saturation qui traduit une puissance fournie finie (hacheur, puissance électrique) ou une protection/sécurité (limitation en courant pour ne pas endommager un mcc) ;
- l'hystérésis qui traduit la présence de jeu.

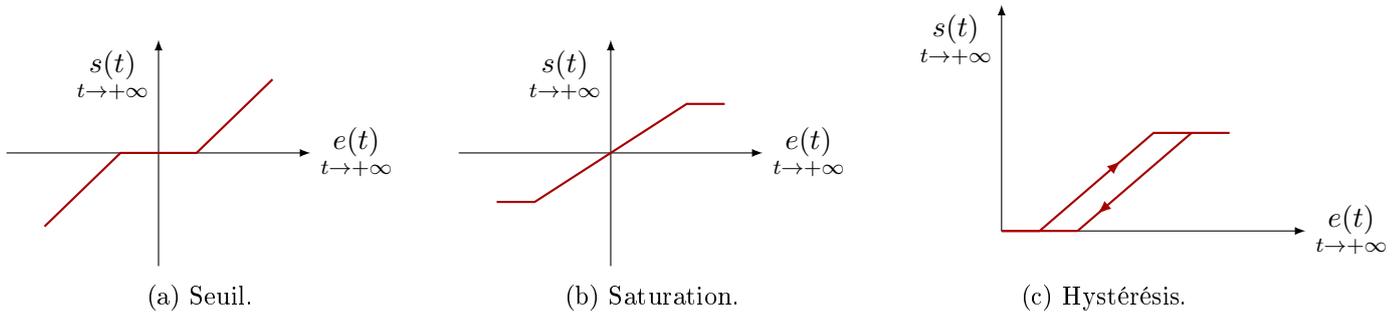


FIGURE 17 – Effets non-linéaires.

5.1.2 Continuité

La plupart des systèmes physiques, sont continus (du point de vue macroscopique). Un système informatique a besoin quant à lui, d'un temps non nul pour réaliser un traitement de l'information, il ne peut traiter que des échantillons des signaux continus. On parle alors de système échantillonné ou discret (*c.f.* FIGURE 18).

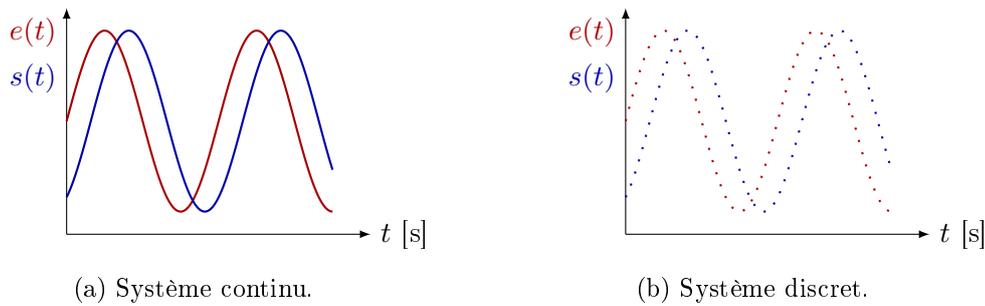


FIGURE 18 – Hypothèse de continuité.

5.1.3 Invariance

Dans la réalité, les systèmes peuvent ne pas être invariants. L'usure de certaines pièces ou la complexité des dispositifs peuvent se traduire par des évolutions des lois de comportement au cours du temps (*c.f.* FIGURE 19).

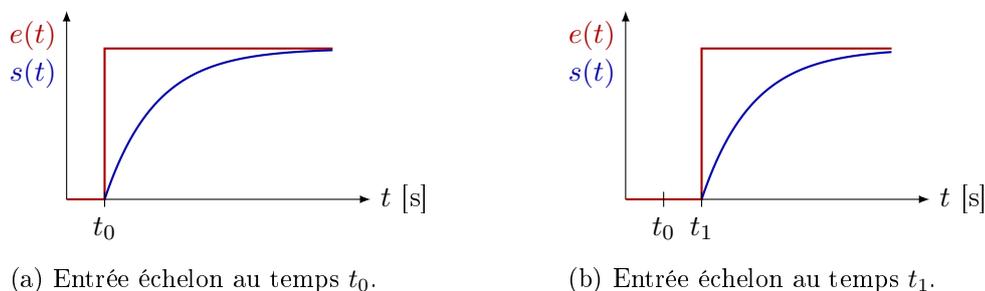


FIGURE 19 – Hypothèse d'invariance.

6 Modélisation des SLCI

Pour les systèmes automatisés réels, on se ramène au cas des SLCI en faisant des hypothèses simplificatrices. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées et d'affiner celui-ci si nécessaire.

Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire de déterminer *une équation reliant l'entrée $e(t)$ (ou les entrées) et la sortie $s(t)$* . Dans tout ce paragraphe, l'entrée e et la sortie s sont quelconques, ce peut être des tensions, des vitesses, des positions, des forces . . . Elles ne sont pas non plus nécessairement de même dimension.

6.1 Modèle de connaissance et de comportement

Pour obtenir cette équation deux types de modélisation sont envisageables :

- Un *modèle de connaissance* établi à partir de lois physiques permet d'aboutir généralement à une telle équation. L'équation obtenue peut être plus ou moins complexe en fonction du système. Cette modélisation est analytique et possède un sens physique fort ;
- À l'inverse, à partir d'un résultat expérimental sur une partie du système, il est possible de proposer un modèle simple dit *modèle de comportement* d'un constituant qui sera ensuite utilisé dans le modèle global du système. C'est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une boîte noire. Le comportement réel de ce sous-système est identifié au mieux à partir de résultats expérimentaux.

L'objectif des parties qui suivent est d'étudier plusieurs modèles très fréquemment rencontrés et d'en découvrir les caractéristiques. Ces modèles simples pourront ainsi être employés comme modèles de connaissance.

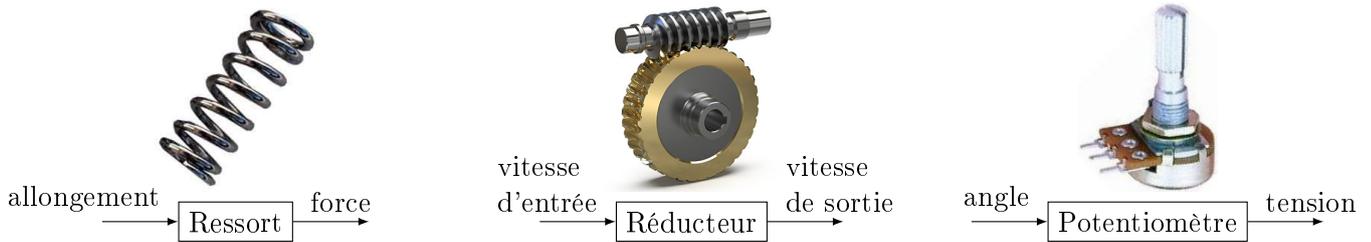
6.2 Systèmes modélisables par un gain pur

La grande majorité des systèmes peuvent être modélisés par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie : $s(t) = K \times e(t)$. La constante de proportionnalité est alors appelée *le gain du système*.

Dans ce type de système, l'entrée et la sortie peuvent être inversées, il n'y a pas de notion de causalité.

On peut ainsi modéliser par une constante la majorité des composants :

- ceux qui transmettent l'énergie sans changer sa nature : les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou . . .) ;
- les composants qui distribuent l'énergie : pré-actionneurs (variateur) ;
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique . . .).



Exemple : Gain d'un système Ressort

La relation reliant la force exercée sur le ressort $F(t)$ (sortie) à l'allongement $\Delta x(t)$ (entrée) est donnée par la relation : $F(t) = k \cdot \Delta x(t)$ où k est la raideur du ressort.

Ainsi le gain K du système est alors égal à k .

6.3 Systèmes modélisés par un intégrateur

Une relation fondamentale lors de la modélisation des systèmes mécaniques est la relation permettant de passer de la vitesse $v(t)$ à la position $x(t)$ (ou de l'accélération $a(t)$ à la vitesse $v(t)$) :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v(t) dt$$

Ainsi la position $x(t)$ est donnée par la relation : $x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$

La FIGURE 20 donne la réponse temporelle à une entrée en échelon et en rampe. En supposant que les conditions initiales soient nulles, quand la vitesse est constante, la position est une droite et quand la vitesse est une droite, la position est une parabole. On notera que pour les temps négatifs, la position est nulle (causale).

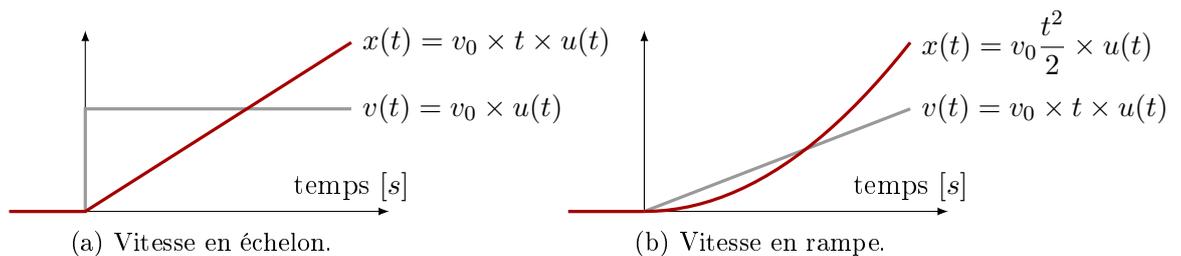


FIGURE 20 – Réponse temporelle de la position pour une entrée en vitesse donnée

6.4 Systèmes électriques et électromécaniques

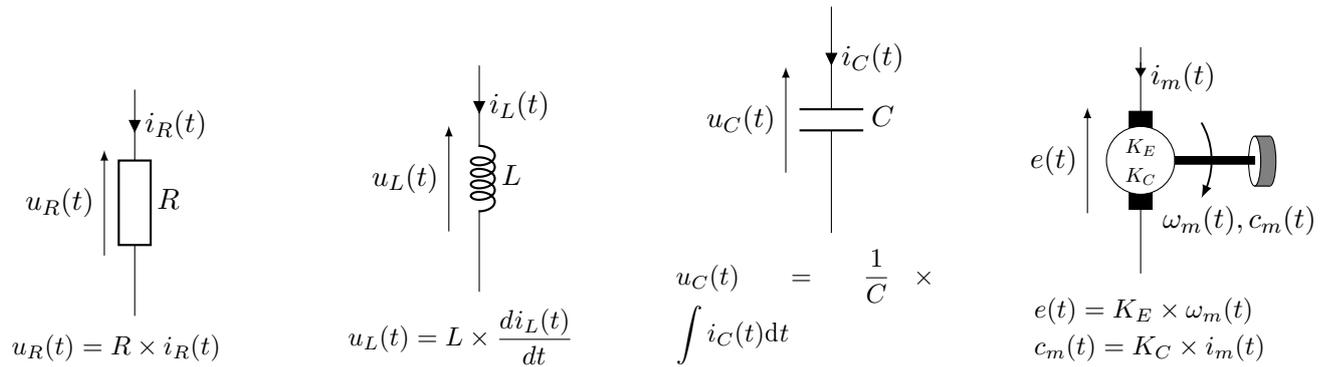


FIGURE 21 – $i(t)$: intensité [A] ; $u(t)$: tension [V] ; $e(t)$: *f.c.e.m.* [V] ; R : résistance [Ω] ; L : inductance [H] ; C : capacité [F] ; K_E : constante de *f.c.e.m.* [$V \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$] ; K_C : constante de couple [$N \cdot m \cdot A^{-1}$]

6.5 Équation générale des systèmes linéaires



Définition *Ordre d'un système*

La plupart du temps, les systèmes linéaires sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Le plus grand des deux indices n et m est appelé *ordre du système*. Pour avoir un système causal, il faut que le degré du signal de dérivation de la sortie soit supérieur à celui du signal d'entrée (sinon cela revient *physiquement* à remonter le temps).

Les équations différentielles définissant le comportement d'un système peuvent être complexe à résoudre. On utilise alors l'outil *transformation de Laplace* pour résoudre facilement ces équations différentielles et ainsi obtenir la fonction f reliant $s(t)$ à $e(t)$:

$$s(t) = f(e(t))$$

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
MODÉLISATION DES SYSTÈMES CONTINUS

Modèle et modélisation

- Un *modèle* est une simplification de la réalité, basé sur des hypothèses ;
- Une *modélisation* est l'utilisation d'un modèle pour une étude spécifique ;
- Pour le même système, plusieurs modèles sont possibles, ils dépendent de l'étude que l'on souhaite effectuer (modèle mécanique, modèle électrique, modèle hydraulique, modèle multi-physique, ...). À chaque modèle, plusieurs modélisation sont réalisables (différentes conditions initiales, différents paramètres du modèle, ...).

Objectifs de la modélisation

La modélisation du comportement d'un système et sa validation se font par une étude :

- temporelle, avec comme signal d'entrée :
 - ◊ un Dirac : $\delta(t) = \delta(t) \times u(t)$;
 - ◊ un échelon : $a \times u(t)$;
 - ◊ une rampe : $b \times t \times u(t)$.
- fréquentielle, avec comme signal d'entrée :
 - ◊ un sinus causal : $\sin(\omega \times t + \varphi) \times u(t)$ (le *causal* vient de la fonction d'Heaviside $u(t)$).

SLCI : système linéaire, continu et invariant

- Un système linéaire possède une relation linéaire entre l'entrée et la sortie. Les quatre non-linéarités sont :
 - ◊ phénomène de courbure ;
 - ◊ effet de seuil ;
 - ◊ effet de saturation ;
 - ◊ hystérésis.
- Un système continu voit ses grandeurs physiques évoluer de manière continue ;
- Un système invariant est indépendant du temps initial t_0 à partir duquel l'étude débute (mais dépend des conditions initiales).

Modélisation des SLCI

- Pour obtenir la relation de comportement d'un système, on peut utiliser :
 - ◊ un modèle de connaissance (relation physique connue) ;
 - ◊ un modèle de comportement (exploitation de mesures expérimentales).
- L'outil *transformation de Laplace*, permet de résoudre facilement les équations différentielles caractérisant l'évolution du système étudié ;

7 Propriétés et définition de la transformation de Laplace



Définition Transformée de Laplace

Soit $s(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle, telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $\mathcal{L}[s]$ comme la fonction S de la variable complexe p , telle que :

$$S(p) = \mathcal{L}[s] = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

La fonction $S(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + j\omega$).

7.1 Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte de la linéarité de l'intégration.

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$$

7.2 Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On peut montrer qu'on obtient les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0) \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dt^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

7.3 Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t)dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

7.4 Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

7.5 Théorème du retard

La transformée de Laplace de la fonction retardée d'un temps τ , $f(t-\tau)$, se déduit de la transformée de Laplace de la fonction non retardée $f(t)$, grâce à la relation :

$$f(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)e^{-\tau p}$$

7.6 Théorème de la valeur initiale

La valeur de f au voisinage de 0, par valeur supérieure, en fonction de sa transformée de Laplace est :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)]$$

7.7 Théorème de la valeur finale

La limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace est donnée par la relation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]$$

7.8 Propriétés diverses

$$e^{-at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p+a)$$

$$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} F(p) dp$$

8 Transformées de Laplace de quelques signaux usuels

En automatique, l'étude temporelle des systèmes linéaires se fait entre $t = 0$ et $t = +\infty$. On définit alors l'échelon unité qui multipliera les signaux de commandes en entrée d'asservissement (*c.f.* TABLE 1).



Définition *Échelon unité*

L'*échelon unité* est la fonction $u(t)$, telle que $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$. On a alors :

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p) = \frac{1}{p}$$



Remarque

Le $u(t)$ dans le tableau est redondant avec l'intégrale de la transformation de Laplace $\int_0^{+\infty}$, il est souvent omis dans les tableaux. Il a été rajouté ici pour ne pas que les élèves soient perdus lorsqu'ils doivent trouver la transformée de Laplace $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot u(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$.

9 Fonction de transfert d'un système linéaire

Considérons un système linéaire quelconque, possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$. On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales, il vient :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot S(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot E(p) + \dots + b_1 \cdot p \cdot E(p) + b_0 \cdot E(p)$$

Finalement, on obtient la *fonction de transfert* du système :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m(p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n(p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)}$$

9.1 Pôles et racines d'une fonction de transfert

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelées les *zéros* de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont appelées les *pôles* de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels.

9.2 Classe d'un système

Certains systèmes peuvent posséder un (ou plusieurs) pôle nul. Leur fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{K \cdot A(p)}{p^\alpha B(p)}$$

Où $A(p)$ et $B(p)$ sont des polynômes en p de terme de degré $o : 1$ (*i.e. de la forme : $1 + a \cdot p + \dots$*). Le paramètre α s'appelle la *classe du système*. En l'absence de pôle nul, on dit que le système est de classe 0.

Lorsqu'un pôle nul est présent dans une fonction de transfert, on dit aussi que le système possède un intégrateur.

10 Conditions d'Heaviside

**Définition** *Conditions d'Heaviside*

Un système est dit dans les conditions de Heaviside, si les fonctions qui le régissent et leurs dérivées successives sont nulles pour $t = 0$, et ce jusqu'à l'ordre $n - 1$ pour une fonction de dérivée n fois. Il s'agit de conditions initiales nulles :

$$f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \frac{d^2f}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0) = 0$$

Ainsi, à partir des théorèmes de dérivation et d'intégration, dans les conditions d'Heaviside, on peut écrire :

- dériver une fois dans le domaine temporel, revient à multiplier par p dans le domaine symbolique de Laplace ;
- intégrer une fois dans le domaine temporel, revient à diviser par p dans le domaine symbolique de Laplace.

Domaine temporel : $f(t)$	Domaine de Laplace : $F(p)$
$\delta(t) \times u(t)$	$\frac{1}{p}$
$1 \times u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n \times u(t)$ (pour $n \geq 1$)	$\frac{p^{n+1}}{n!}$
$e^{-c.t} \times u(t)$	$\frac{1}{p+c}$
$t^n \times e^{-c.t} \times u(t)$	$\frac{1}{n! (p+c)^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}} \times u(t)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$a^t \times u(t)$	$\frac{1}{p - \ln(a)}$
$\sin(a.t + b) \times u(t)$	$\frac{a \cos(b) + p \sin(b)}{p^2 + a^2}$
$\cos(a.t + b) \times u(t)$	$\frac{p \cos(b) - a \sin(b)}{p^2 + a^2}$
$e^{-a.t} \times \sin(\omega.t) \times u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} \times \cos(\omega.t) \times u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-a.t}) \times u(t)$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$\frac{1}{a} \left(\frac{e^{-a.t}}{a} + t - \frac{1}{a} \right) \times u(t)$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-a.t} - a.t.e^{-a.t}) \times u(t)$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
$t.e^{-a.t} \times u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$e^{-a.t}(1 - a.t) \times u(t)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
$\left(1 - \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) u(t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$ avec $\xi > 1$
$(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}) u(t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p-p_1)^2}$ avec $\xi = 1$
$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \left[\sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right) \right] \right) u(t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$ avec $\xi < 1$

TABLE 1 – Transformées de Laplace usuelles (en considérant nulles les différentes conditions initiales).

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformation de Laplace

- La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est obtenue par la relation :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec : } p = \tau + j\omega$$

- Voici quelques propriétés à retenir de la transformation de Laplace :

- $\frac{df}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$
- $\frac{d^2f}{dt^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
- $\int f(t)dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$
- $f(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)e^{-\tau p}$
- $f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)]$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]$

Fonction de transfert d'un système linéaire

- La fonction de transfert d'un système est donné par $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- Les racines qui annulent le numérateur, sont appelées les *zéros* de la fonction de transfert ;
- Les racines qui annulent le dénominateur, sont appelées les *pôles* de la fonction de transfert ;
- Si on met la fonction de transfert sous la forme : $G(p) = \frac{A(p)}{p^\alpha B(p)}$, alors le paramètre α s'appelle la *classe du système* ;

- Si on met la fonction de transfert sous la forme : $G(p) = \frac{A(p)}{p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$, alors le paramètre $\alpha + n$ s'appelle l'*ordre du système* .

On a bien un système causal car le dénominateur est un polynôme de degré plus important que le numérateur, donc le signal de sortie a une dérivée temporelle de degré plus élevé que le signal d'entrée.

Conditions d'Heaviside

- Les conditions initiales sont nulles pour les dérivées successives de la fonction f respectant ces conditions ;
- Il en découle que, pour une fonction f respectant les conditions d'Heaviside :
 - ◊ $\frac{df}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} p \times F(p)$;
 - ◊ $\int f(t) dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$.

11 Modélisation par schéma-blocs

Un système complexe peut être décrit par un schéma-blocs fonctionnel dans lequel les noms des constituants apparaissent dans des blocs. Chaque nom de composant peut être remplacé par sa fonc-

tion de transfert (obtenue par un modèle de connaissance ou de comportement) et ainsi nous pouvons construire un schéma-blocs.

Pour un système donné, il existe un unique schéma-blocs fonctionnel, par contre il est possible de faire autant de schéma-blocs que l'on souhaite étant donné que les blocs représentent des équations et peuvent donc être manipulés comme on veut.

11.1 Description de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot

Une consigne de vitesse angulaire de rotation ω_c [rad.s⁻¹] est adaptée à l'aide d'un adaptateur de gain K_a en une tension de consigne u_c [V]. Cette tension de consigne est comparée à la tension u_m [V] délivrée par le capteur de type génératrice tachymétrique de gain K_t , proportionnelle à la vitesse angulaire réelle ω [rad.s⁻¹]. L'écart de tension ε [V] est corrigé par un correcteur, représenté par sa fonction de transfert $C(p) = C$, qui fournit la tension de commande u_{com} [V] au variateur de gain K_v pilotant le moteur par une tension u_{mot} [V]. Le moteur, dont la fonction de transfert est notée $H_{mot}(p)$ transforme cette tension en vitesse de rotation ω_{mot} [rad.s⁻¹], puis cette vitesse est réduite par un réducteur de gain K_r pour obtenir la vitesse angulaire de sortie ω [rad.s⁻¹].

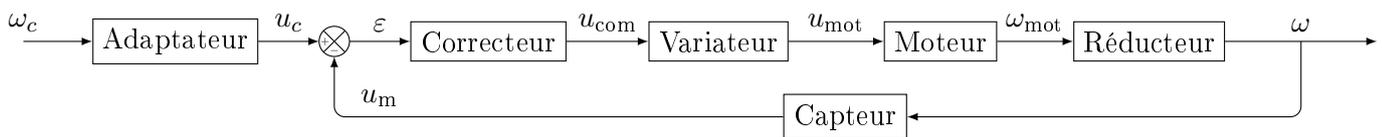


FIGURE 22 – Schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en vitesse angulaire d'un bras de robot.

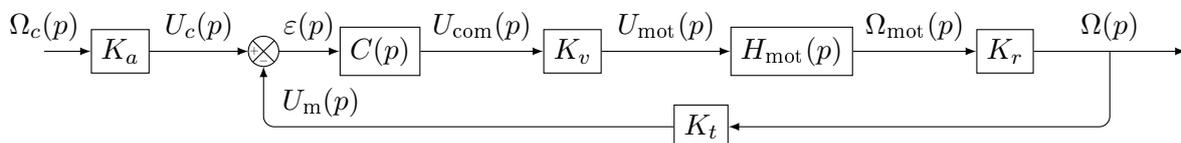


FIGURE 23 – Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse angulaire d'un bras de robot.

12 Manipulations de blocs

12.1 Fonction de transfert globale

On rappelle que la représentation globale d'un système linéaire continu et invariant peut être faite de la manière suivante dans le domaine symbolique (ou domaine de Laplace), pour une entrée et une sortie :

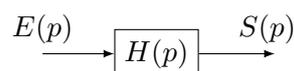


FIGURE 24 – Fonction de transfert globale.

$H(p)$ est la *fonction de transfert globale* du système. Les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside).

Un système asservi est une association de différents constituants pouvant chacun être modélisé par une fonction de transfert particulière. La fonction de transfert globale doit engendrer un comportement mathématiquement équivalent à celui du système complet, mais éloigne le modèle de sa réalité structurale. Son intérêt est donc mathématique, elle doit permettre une étude temporelle et fréquentielle simplifiée du comportement du système.

12.2 Association de blocs en série

Les schéma-blocs présentent souvent des blocs en série (cascade) que l'on peut réduire dans le cadre du calcul de la fonction de transfert globale du système.

La fonction de transfert équivalente à l'association en série de plusieurs blocs est égale au produit des fonctions de transfert de ces blocs.

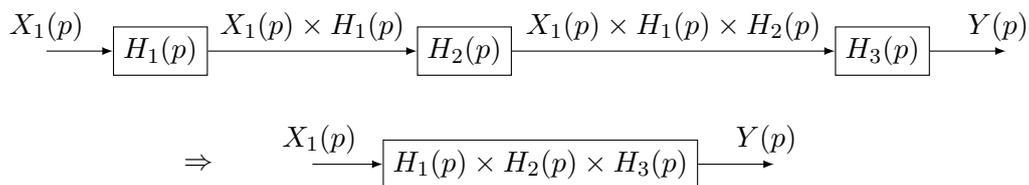


FIGURE 25 – Association de blocs en série.

12.3 Association de blocs en parallèle

Deux blocs sont dit en parallèle, lorsqu'une grandeur sur un lien se sépare en deux branches pour aller dans deux blocs différents et que la sortie de ces blocs se regroupe à l'aide d'un sommateur pour former une sortie.

La fonction de transfert équivalente à plusieurs blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de ces blocs, affectée des signes du sommateur.

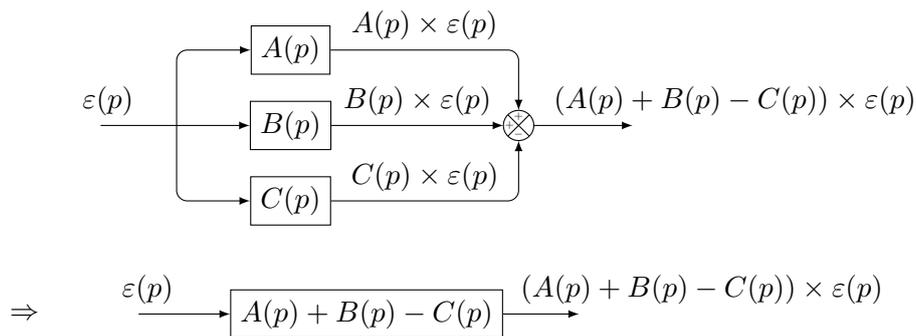


FIGURE 26 – Association de blocs en parallèle.

12.4 Déplacement de bloc

Les schémas-blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier (*c.f.* FIGURES 27 et 28). L'inconvénient à modifier la structure du schéma, est de perdre les grandeurs physiques du système

étudié. Mais cela aide grandement à la résolution et à l'étude des équations différentielles décrivant le comportement du système.

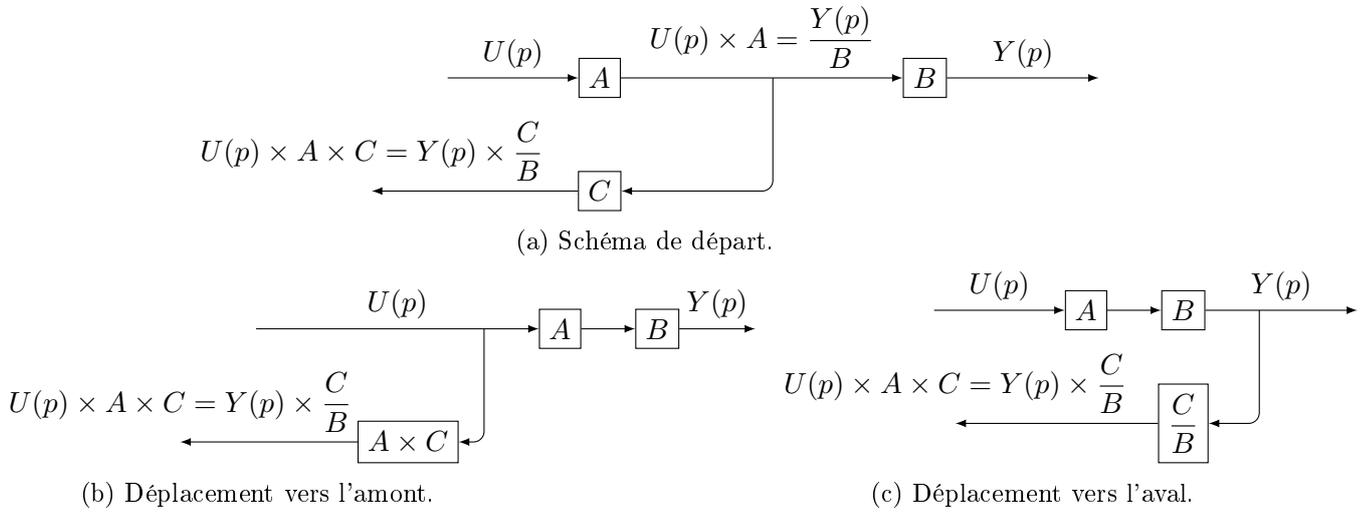


FIGURE 27 – Exemple de déplacements de blocs sur chaîne de retour.

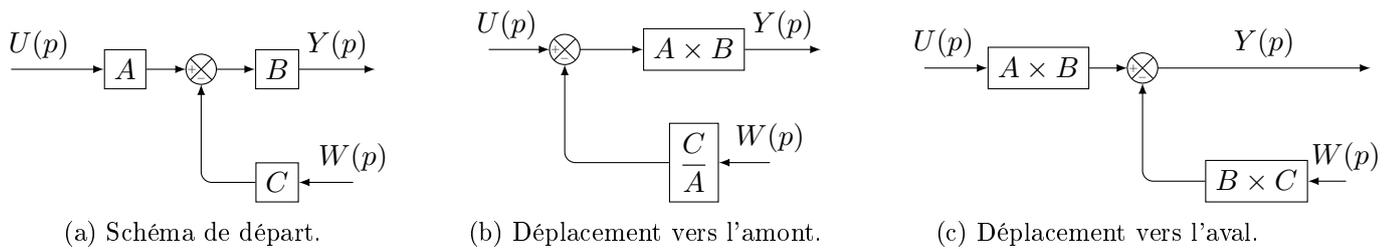


FIGURE 28 – Exemple de déplacements de blocs sur comparateur.

13 Boucle ouverte, boucle fermée, formule de Black

Soit la fonction de transfert suivante :

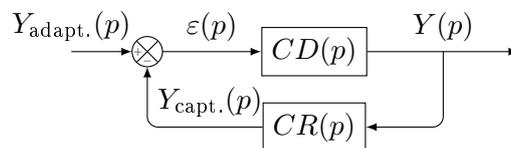


FIGURE 29 – Chaîne directe $CD(p)$ et chaîne de retour $CR(p)$.

Définition *FTBO et FTBF en poursuite* (donc pour une perturbation nulle)
 La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi, notée *FTBO*, est la fonction de

transfert liant l'image de la sortie de la boucle de rétroaction à l'écart

$$FTBO(p) = \frac{Y_{\text{capt.}}(p)}{\varepsilon(p)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi, notée $FTBF$, est la fonction de transfert liant la sortie à l'entrée du système.

$$FTBF(p) = \frac{Y(p)}{Y_{\text{adapt.}}(p)}$$

Les expressions des deux fonctions de transfert sont pour la :

- **FTBO** :

$$FTBO(p) = \frac{Y_{\text{capt.}}(p)}{\varepsilon(p)} = CD(p) \times CR(p)$$

- **FTBF** :

$$FTBF(p) = \frac{Y(p)}{Y_{\text{adapt.}}(p)} = \frac{CD(p)}{1 + CD(p) \times CR(p)} = \frac{CD(p)}{1 + FTBO(p)}$$



Définition *Formule de Black*

Dans le cas d'un système mis sous la forme de la FIGURE 29, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$FTBF(p) = \frac{CD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

14 Ordre et classe d'un système asservi



Définition *Ordre et classe d'un système*

On appelle *ordre* d'un système, le degré du dénominateur de sa fonction de transfert.

On appelle *classe* d'un système, la puissance du terme en p , mis en facteur au dénominateur de sa fonction de transfert.

exemple :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m)}{p^\alpha(1 + a_1 \cdot p + \dots + a_k \cdot p^k)}$$

- le réel K est le *gain statique* de la FTBO ;
- l'entier α est appelé la *classe* du système, avec $\alpha \geq 0$;
- l'entier $n = \alpha + k$ est l'*ordre* du système.

15 Système asservi à retour unitaire

Définir une erreur suppose que celle-ci ait un sens et impose deux conditions. La première bien entendu, est que l'entrée et la sortie soient de même nature (pour que leur comparaison soit possible). Mais de plus, la notion d'erreur revêt un caractère subjectif qui attend, à priori, que celle-ci soit nulle. Aussi n'a-t-elle de sens, que si l'entrée est effectivement une consigne, au sens de valeur attendue pour la sortie, ce qui constitue une seconde condition¹.

Voici un exemple de modification d'un schéma bloc pour une fonction de transfert en poursuite en FIGURE 30 afin d'obtenir un retour unitaire.

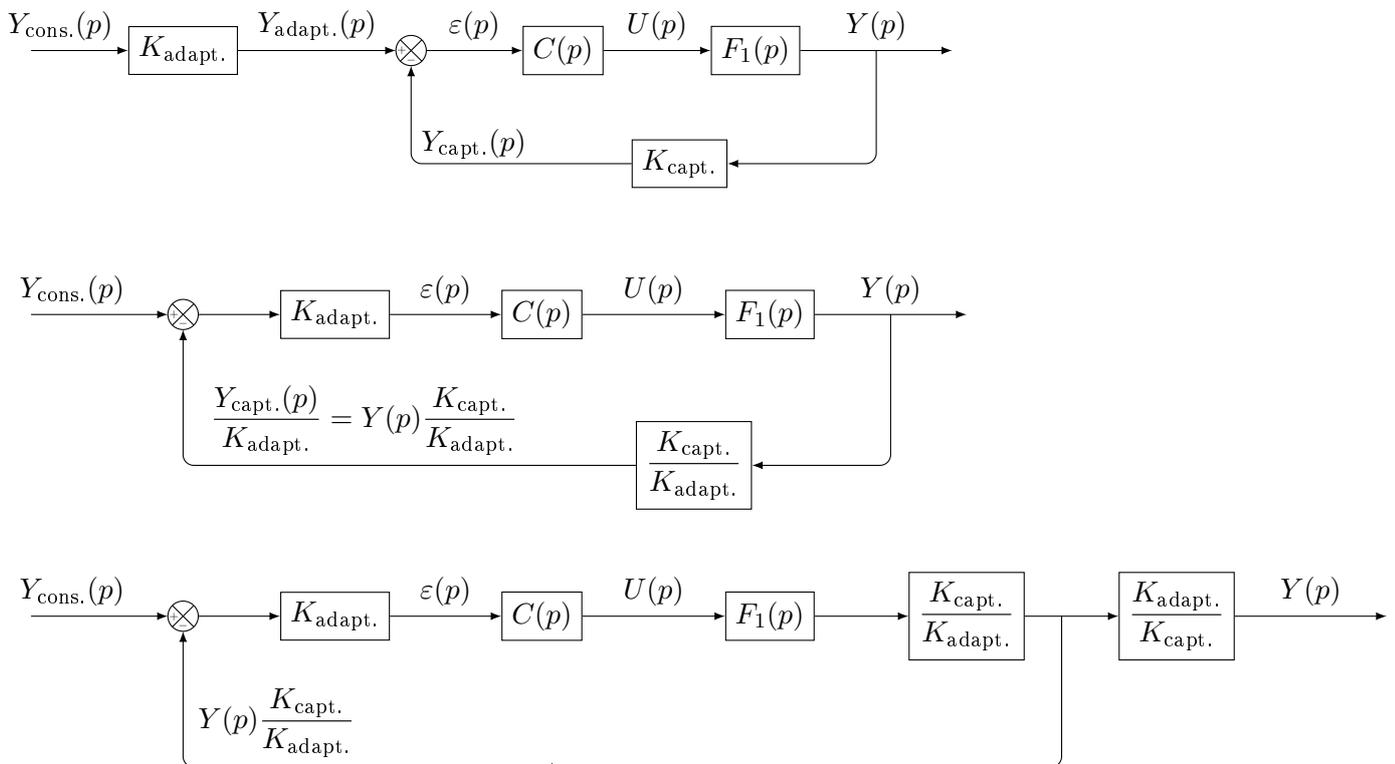


FIGURE 30 – Fonction de transfert à retour unitaire.

Afin de comparer des choses comparables, il faut que l'on pose $K_{\text{capt.}} = K_{\text{adapt.}}$, on remarque alors qu'un écart nul est obtenu lorsque l'erreur statique est nulle :

$$\varepsilon(p) = K_{\text{capt.}} \times \mu(p)$$

Dans ce cas particulier, on obtient le schéma bloc suivant :

1. À titre de contre-exemple, un amplificateur possède bien une entrée et une sortie de même nature, mais il n'est pas attendu que la sortie atteigne le même niveau que la sortie, au contraire : parler d'erreur en les comparant n'aurait alors aucun sens.

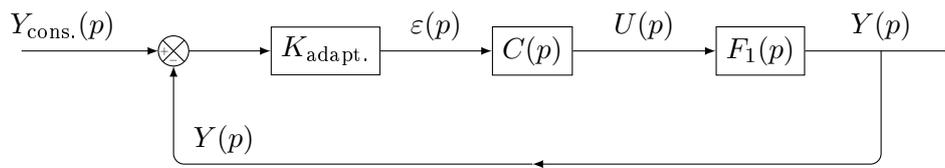


FIGURE 31 – Fonction de transfert à retour unitaire avec un écart homogène à la grandeur générée et à la consigne.

16 Erreur et écart

L'erreur est la différence entre la consigne et la sortie :

$$\mu(p) = Y_{\text{cons.}}(p) - Y(p)$$

L'écart est la grandeur en sortie du comparateur (pour l'exemple de la FIGURE 6) :

$$\varepsilon(p) = Y_{\text{adapt.}}(p) - Y_{\text{capt.}}(p) = K_{\text{adapt.}}Y_{\text{cons.}}(p) - K_{\text{capt.}}Y(p)$$

16.1 Erreur et écart dynamique ou statique

On distingue les résultats en régime transitoire (μ_d et ε_d , avec d pour dynamique) de ceux en régime permanent (μ_s et ε_s , avec s pour statique).

17 Exemple : le moteur à courant continu

On considère comme système, un moteur à courant continu. Un tel moteur, constitue un système commandé intrinsèquement stable. Il transforme une tension $U(p)$ en une vitesse de rotation $\Omega(p)$ (c.f. FIGURE 32). **Attention, le schéma bloc d'un MCC n'est pas un asservissement ...le retour n'est pas dû à un capteur, mais à une loi comportementale de fonctionnement.**

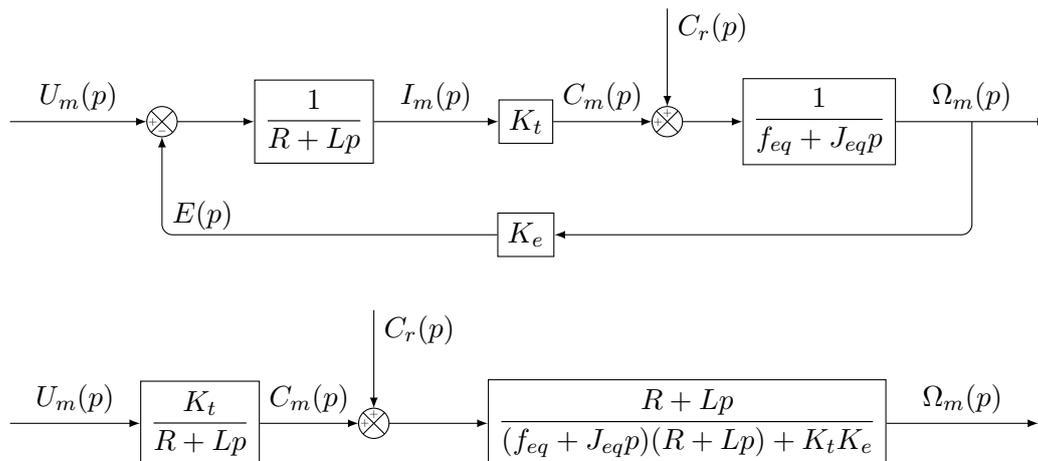


FIGURE 32 – Description par schéma-bloc des équations différentielles régissant le fonctionnement d'un MCC.

On obtient alors la relation suivante (qui n'est pas un asservissement) :

$$\Omega_m(p) = \frac{K_t}{(f_{eq} + J_{eq}p)(R + Lp) + K_t K_e} \times U_m(p) + \frac{R + Lp}{(f_{eq} + J_{eq}p)(R + Lp) + K_e K_t} \times C_r(p)$$

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
SCHÉMA-BLOCS**Modélisation par schéma-blocs**

- Chaque éléments composant le système asservi peut être décrit par un *bloc*. Ce bloc peut être obtenu à l'aide d'un modèle de *connaissance* ou de *comportement*. On passe ainsi d'un schéma *fonctionnel* à un schéma dans le *domaine de Laplace*.

Manipulation de blocs

- La fonction de transfert équivalente à plusieurs blocs en *série* est égale au *produit* des fonctions de transfert de ces blocs ;
- La fonction de transfert équivalente à plusieurs blocs en *parallèle* est égale à la *somme* des fonctions de transfert de ces blocs, affectée des signes du sommateur ;
- Lors d'un déplacement de bloc, il faut prendre soin d'avoir toujours le même *signal d'information* qui circule dans le système ;
- Les fonctions de transfert en *boucle ouverte* et en *boucle fermée* sont définies par les relations suivantes :

$$\diamond FTBO(p) = CD(p) \times CR(p);$$

$$\diamond FTBF(p) = \frac{CD(p)}{1 + FTBO(p)} \quad \text{c'est la formule de Black.}$$

Ordre et classe d'un système

- Pour une fonction de transfert de type :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + b_1.p + \dots + b_m.p^m)}{p^\alpha(1 + a_1.p + \dots + a_k.p^k)}$$

α est classe du système et $\alpha + k$ est l'ordre du système.

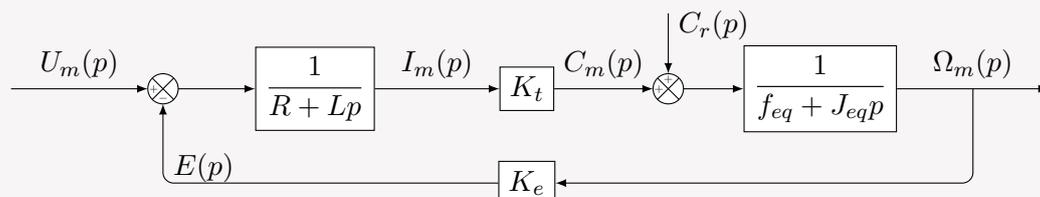
Système à retour unitaire

- Les systèmes asservis peuvent souvent se ramener à une structure à retour unitaire quand l'entrée et la sortie sont de même nature. Il est alors plus aisé de les commander ;
- $K_{\text{adapt.}} = K_{\text{capt.}} \Leftrightarrow \mu = \varepsilon = 0$.

Erreur et écart

- L'erreur est défini comme : $\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t)$;
- L'écart est défini comme : $\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{adapt.}}(t) - y_{\text{capt.}}(t)$ c'est la grandeur en sortie du comparateur.
- : On distingue le résultat en régime transitoire (on parle, d'écart ou d'erreur *dynamique*) du résultat en régime permanent (on parle, d'écart ou d'erreur *statique*).

Exemple : le moteur à courant continu Le schéma-blocs du mcc est le suivant :



Ceci n'est pas un asservissement, car il n'y a pas de capteur dans la boucle retour, ce retour caractérise seulement une loi comportementale du mcc.

18 Transformée de Laplace directe et inverse

La transformée de Laplace permet de résoudre *simplement* une équation différentielle. Pour cela il est nécessaire de :

1. Passer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace ;
2. Choisir le type de signal pour la consigne en entrée ;
3. Décomposer la fraction en éléments simples ;
4. Repasser dans le domaine temporelle à l'aide de la transformée inverse de Laplace ;

18.1 Décomposition en éléments simples

Objectif : Transformer le quotient de deux polynômes en p (désignant l'expression dans le domaine de Laplace de la réponse d'un système) en éléments simples dont les transformées de Laplace inverses seront extraites du tableau des transformées de Laplace (*c.f.* TABLE 1).

Soit une fonction de transfert donnée sous la forme $\frac{P(p)}{Q(p)}$ avec :

- $P(p)$ et $Q(p)$ deux polynômes à coefficients réels ;
- $\deg(P) \leq \deg(Q)$ (système causal).



Définition Décomposition en éléments simples

Tout polynôme $Z(p)$ à coefficients réels se décompose de manière unique dans \mathbb{R} comme produit de facteurs de la forme $(p - r_i)^{m_i}$ ou $(p^2 + a_j p + b_j)^{n_j}$:

$$Z(p) = K \prod_i (p - r_i)^{m_i} \prod_j (p^2 + a_j p + b_j)^{n_j}$$

Les coefficients m_i et n_j sont appelés ordres de multiplicité.

Seul le polynôme du dénominateur $Q(p)$ est factorisé. Les différents termes seront appelés *éléments simples*.

La fraction rationnelle $\frac{P(p)}{Q(p)}$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments simples de $Q(p)$:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(p - r_i)^k} + \sum_j \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{B_{j\ell} p + C_{j\ell}}{(p^2 + a_j p + b_j)^\ell}$$

Pour déterminer les différents coefficients A_{ik} , $B_{j\ell}$ et $C_{j\ell}$, il faut réduire l'expression au même dénominateur puis identifier chaque coefficient des polynômes.

18.1.1 Exemple :

Soit la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)(p + 3)}$$

Le dénominateur est déjà écrit sous forme factorisé : $p + 3$ à racine réelle et $p^2 + p + 1$ à racines complexes conjuguées.

La décomposition en élément simple s'écrira :

$$H(p) = \frac{A}{p + 3} + \frac{Bp + C}{p^2 + p + 1}$$

Réduisons au même dénominateur l'expression de $H(p)$:

$$H(p) = \frac{A(p^2 + p + 1) + (Bp + C)(p + 3)}{(p + 3)(p^2 + p + 1)}$$

Développons l'expression :

$$H(p) = \frac{(A + B)p^2 + (A + 3B + C)p + (A + 3C)}{(p + 3)(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{(p + 3)(p^2 + p + 1)}$$

Identifions les deux polynômes du numérateur :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 3B + C = 0 \\ A + 3C = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/7 \\ B = -1/7 \\ C = 2/7 \end{cases}$$

D'où l'expression finale de $H(p)$ décomposé en éléments simples :

$$H(p) = \frac{1/7}{p + 3} + \frac{-1/7p + 2/7}{p^2 + p + 1}$$

Les calculatrices formelles réalisent les décompositions en éléments simples à l'aide de fonctions telles que develop ou expand.

19 Système d'ordre 1

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. L'équation la plus couramment rencontrée est de type :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

On passe dans le domaine de Laplace, pour obtenir :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

19.1 Réponse impulsionnelle

On étudie la réponse du système (donc la sortie $s(t)$), lorsqu'il est soumis à une impulsion (on a en entrée un Dirac : $e(t) = \delta(t)$ ²).

$$S(p) = G(p) \times E(p) = \frac{K}{1 + Tp} \times 1$$

La transformée inverse de Laplace (en considérant nulles les différentes conditions initiales) donne l'expression temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée impulsionnelle :

$$s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La constante T peut être mise en évidence très facilement graphiquement (*c.f.* FIGURE 33). Comme dans toute fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici l'axe des abscisses) au point d'abscisse T . On parle de la *constante de temps* T .

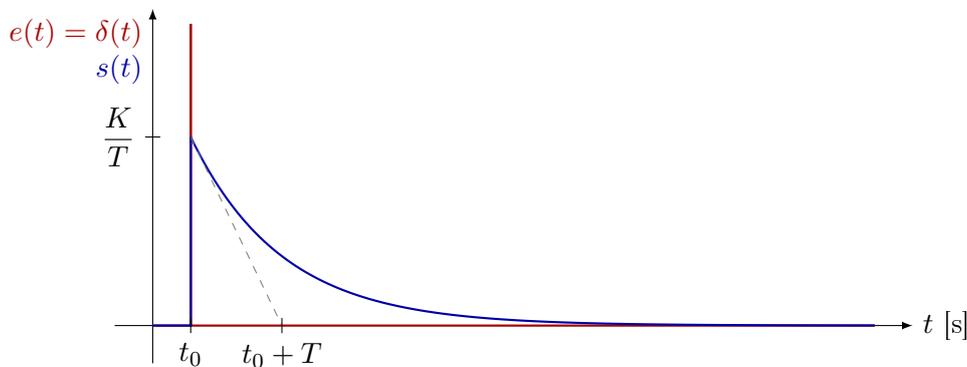


FIGURE 33 – Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 1.

19.2 Réponse indicielle

On étudie la réponse indicielle du système (donc la sortie $s(t)$) pour une entrée en échelon unitaire ($e(t) = u(t)$ ³).

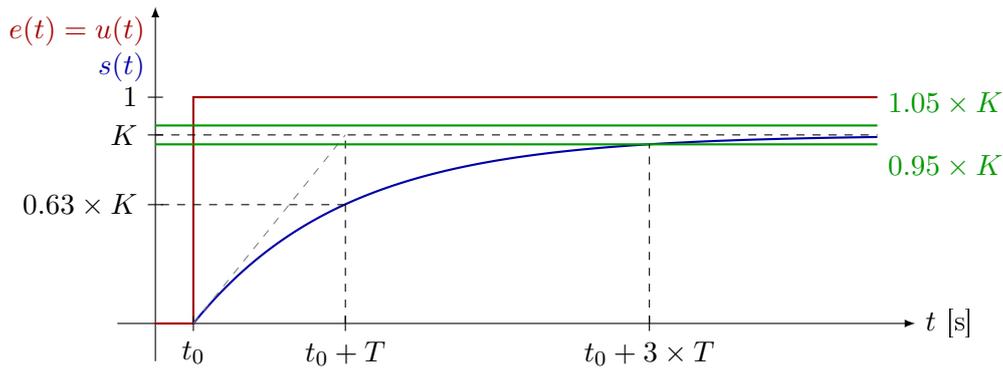
$$S(p) = G(p) \times E(p) = \frac{K}{1 + Tp} \times \frac{1}{p}$$

La transformée inverse de Laplace (en considérant nulles les différentes conditions initiales) donne l'expression temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée impulsionnelle :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

La constante T peut être mise en évidence très facilement graphiquement (*c.f.* FIGURE 34). On a la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote au point d'abscisse T , le signal tend vers K lorsque t tend vers l'infini. Le paramètre K est appelé *gain statique*, car il correspond au rapport de la valeur de sortie sur la valeur d'entrée (égale à 1) lorsque t tend vers l'infini (c'est-à-dire quand le système est censé ne plus évoluer).

-
2. $e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = 1$
 3. $e(t) = u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{1}{p}$

FIGURE 34 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 1, pour un gain $K < 1$.

19.2.1 Temps de réponse à 95% (ou à 5%) de la valeur de convergence

On peut définir, à partir de ce graphe, le *temps de réponse* t_r du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5% près.

$$s(t_r) = K \left(1 - e^{-\frac{t_r}{T}}\right) = 0.95K$$

$$\left(1 - e^{-\frac{t_r}{T}}\right) = 0.95$$

$$e^{-\frac{t_r}{T}} = 0.05$$

$$t_r = -T \ln(0.05) \simeq 3T$$

19.2.2 Constante de temps T

On remarque que : $s(T) = K(1 - e^{-1}) \simeq 0.63K$. Ce dernier résultat permet d'identifier rapidement la constante de temps sur le graphe.

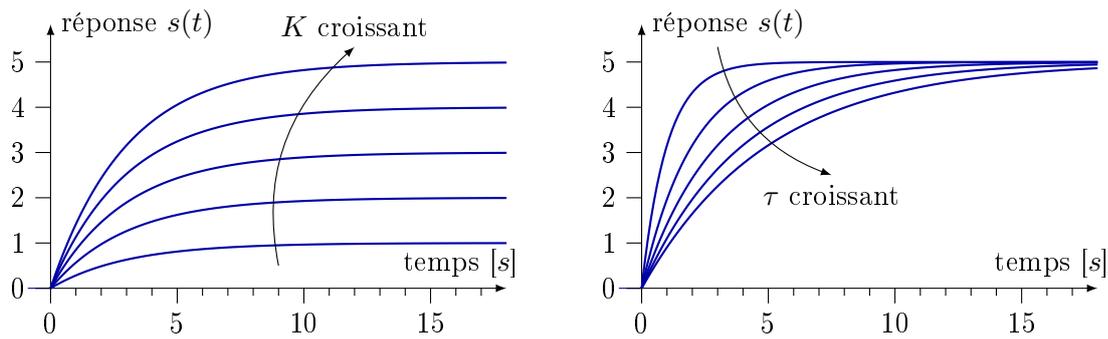
19.2.3 Gain statique K

Lorsque le temps tend vers l'infini, la valeur de sortie tend vers K , ce qui permet de définir une précision entre la consigne d'entrée et la valeur de sortie, on parle ici d'erreur μ :

$$\mu = e(t \rightarrow \infty) - s(t \rightarrow \infty) = 1 - K \quad (\text{pour une entrée échelon unitaire/réponse indicielle})$$

19.2.4 Influence des paramètres du premier ordre sur la réponse indicielle

La constante de temps τ et le gain statique K sont *indépendants*. La rapidité d'un système du premier ordre est liée uniquement à τ . De même, la précision d'un système du premier ordre est lié uniquement à K (c.f. FIGURE 35).

FIGURE 35 – Influence des paramètres du modèle du 1^{er} ordre sur la réponse indicielle.

19.3 Réponse à une rampe unitaire

On étudie la réponse du système (donc la sortie $s(t)$) pour une entrée en rampe unitaire ($e(t) = t \times u(t)$).

$$S(p) = G(p) \times E(p) = \frac{K}{1 + Tp} \times \frac{1}{p^2}$$

La transformée inverse de Laplace (en considérant nulles les différentes conditions initiales) donne l'expression temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée impulsionnelle :

$$s(t) = K(t - T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$$

Le terme $KTe^{-\frac{t}{T}}$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, on met ainsi en évidence une asymptote oblique à la courbe $s(t)$ d'équation asymptote = $K(t - T)$. Comme le terme $KTe^{-\frac{t}{T}}$ est toujours strictement positif, la courbe se trouve en permanence au dessus de son asymptote. Par ailleurs, la tangente en 0 à la courbe est nulle ($\frac{ds(t)}{dt} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0) = 0$). On peut alors tracer le graphe de $s(t)$ (c.f. FIGURE 36).

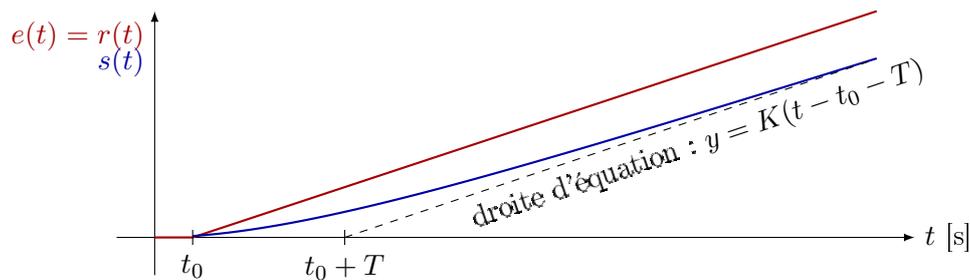


FIGURE 36 – Réponse à une rampe unitaire d'un système d'ordre 1.

20 Système d'ordre 2

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. L'équation la plus couramment

4. $e(t) = t \times u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{1}{p^2}$

rencontrée est de type :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

On passe dans le domaine de Laplace, pour obtenir :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1}$$

ω_0 est appelée la *pulsation propre* du système, ξ est appelée coefficient ou *facteur d'amortissement* et K est le *gain statique*.

20.1 Réponse indicielle

On étudie la réponse du système (donc la sortie $s(t)$), lorsqu'il est soumis à une impulsion (on a en entrée un Dirac : $e(t) = \delta(t)$ ⁵).

$$S(p) = G(p) \times E(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1} \times 1$$

Pour connaître la transformée inverse de Laplace, il faut mettre le dénominateur sous forme canonique, et donc calculer son déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$$

Le dénominateur peut se réécrire de la façon suivante :

$$\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1 = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2)$$

À noter que $p_1 p_2 = \omega_0^2$ et $p_1 + p_2 = -2\xi \omega_0$

20.1.1 Discriminant positif - régime amorti : $\xi > 1$

Le polynôme possède alors deux racines réelles qui sont :

$$p_1 = -\omega_0 \left[\xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_0 \left[\xi + \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right]$$

On a alors :

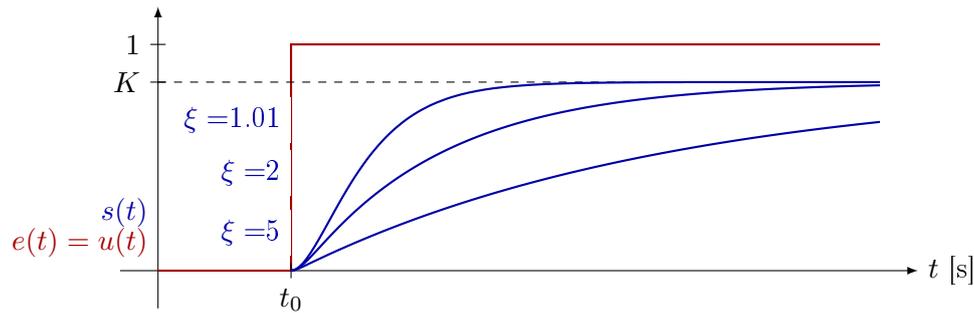
$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

D'où (en considérant nulles les différentes conditions initiales) :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right]$$

Il existe deux asymptotes horizontales, une en $t = 0$ et une autre en $t \rightarrow +\infty$. Les deux termes en exponentielles, décroissent d'autant plus lentement que ξ est grand (*c.f.* FIGURE 37).

5. $e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = 1$

FIGURE 37 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 2, pour $\xi \geq 1$ et $K < 1$.

20.1.2 Discriminant nul - régime critique : $\xi = 1$

Le polynôme possède alors une racine réelle double qui est :

$$p_0 = -\omega_0$$

On a alors :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p - p_0)^2}$$

D'où (en considérant nulles les différentes conditions initiales) :

$$s(t) = Ku(t) - K(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

Il existe deux asymptotes horizontales, une en $t = 0$ et une autre en $t \rightarrow +\infty$ (c.f. FIGURE 37).

20.1.3 Discriminant négatif - régime oscillatoire amorti : $\xi < 1$

Le polynôme possède alors deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$p_1 = -\omega_0 \left[\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_0 \left[\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right]$$

On a alors :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

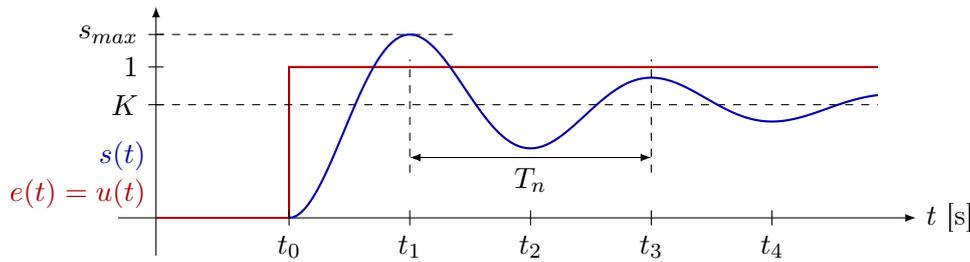
D'où (en considérant nulles les différentes conditions initiales) :

$$s(t) = Ku(t) - Ke^{-\xi\omega_0 t} \left[\cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \times t \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \times t \right) \right]$$

Ou encore :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \left[\sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \times t + \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right) \right]$$

Il existe deux asymptotes horizontales, une en $t = 0$ et une autre en $t \rightarrow +\infty$. La réponse du système est constituée de la différence de deux signaux : le signal $Ku(t)$, échelon de hauteur K et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante (c.f. FIGURE 38). Cette

FIGURE 38 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 2, pour $\xi < 1$ et $K < 1$.

pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie. Elle est d'autant plus grande que ξ est proche de 1.

On remarque que le signal de sortie présente un dépassement de son régime permanent. On chiffre en général ce dépassement en valeur relative par rapport à la valeur finale et on l'exprime en pourcentage :

$$D_{1\%} = 100 \times \frac{s_{max} - K}{K} = 100 \times e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

La pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Elle est appelée *pseudo-pulsation* du régime oscillatoire amortie. Elle est toujours inférieure à la pulsation ω_0 . On définit également la *pseudo-période* de ces oscillations par :

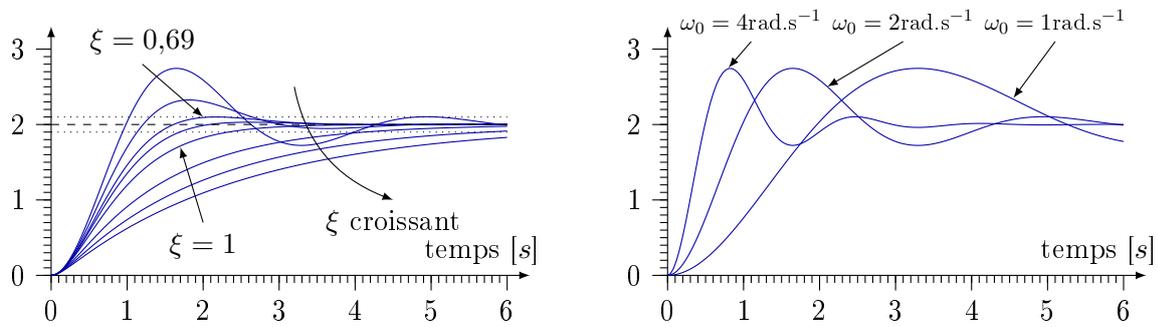
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On remarque que $t_{i+1} = t_i + \frac{T_n}{2}$, d'où l'expression générale pour le temps du $k^{\text{ième}}$ dépassement :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

20.1.4 Influence des paramètres du second ordre sur la réponse indicielle

Le gain statique K a la même influence sur la précision (caractérisée par l'erreur μ) qu'un système du premier ordre. Pour ce qui est du facteur d'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 , on peut observer (*c.f.* FIGURE 39) que le facteur d'amortissement joue sur la rapidité ($\xi = 1$: système le plus rapide sans dépassement, $\xi = 0.69$: système le plus rapide avec dépassement) et sur la stabilité du système (présence ou non de dépassement), la pulsation propre joue sur la rapidité du système.



(a) Influence de l'amortissement ξ : $K = 2$, $\omega_0 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $\xi \in \{0,3; 0,5; 0,69; 0,8; 1; 1,5; 2; 2,5\}$.

(b) Influence de la pulsation propre ω_0 : $K = 2$, $\xi = 0,3$, $\omega_0 \in \{1; 2; 4\} \text{ rad.s}^{-1}$.

FIGURE 39 – Influence des paramètres caractéristiques d'un système du 2^{ème} ordre sur la réponse indicielle.

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
ÉTUDE TEMPORELLE DES SYSTÈMES CONTINUS

Transformée de Laplace directe et inverse

La décomposition en éléments simples, permet de déterminer l'expression temporelle d'une fraction de polynômes en p , à l'aide des transformations inverses de Laplace classiques.

Système d'ordre 1

- La fonction de transfert d'un système d'ordre 1 peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

- K est le *gain statique* et T la *constante de temps* ;
- Pour une réponse à un échelon, la tangente à l'origine n'est pas nulle ;
- Les relations à connaître par cœur sont :
 - ◊ **temps de réponse à 95%** : $t_{95\%} = 3 \times T$;
 - ◊ **temps de réponse à 63%** : $t_{63\%} = T$;

Système d'ordre 2

- La fonction de transfert d'un système d'ordre 2 peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1}$$

- K est le *gain statique*, ω_0 est la *pulsation propre* du système et ξ est le coefficient ou *facteur d'amortissement* ;
- Pour une réponse à un échelon, la tangente à l'origine est nulle ;
- La pulsation de coupure à -3 dB est la pulsation propre du système lorsque $\xi \geq 1$;
- Les relations à connaître par cœur sont :
 - ◊ **pulsation propre** : $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ (valable pour $\xi < 1$) ;
 - ◊ **temps de réponse à 5%** : $t_{5\%} \geq \frac{3}{\omega_0}$ (valable pour $\xi > 1$) ;
 - ◊ **pulsation de résonance** : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ (valable pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$) ;
 - ◊ **facteur d'amortissement** : $\xi = 1$ réponse la plus rapide sans dépassement, $\xi = 0.69$ réponse la plus rapide avec dépassement.

21 Décomposition en série de Fourier

Le signal d'entrée d'un système est rarement un signal simple (de type échelon ou rampe). La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) résulte de la sommation, souvent infinie, d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes.

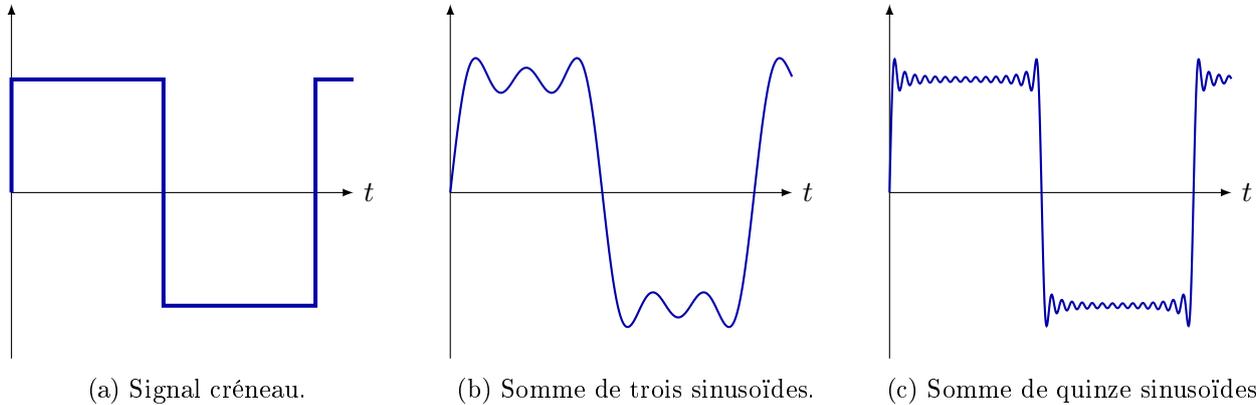


FIGURE 40 – Décomposition en série de Fourier d'un signal crêteau.

La réponse d'un système à un signal quelconque doit donc pouvoir se déduire de l'ensemble de ses réponses à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée.

Ainsi, étudier la réponse du système pour une multitude d'entrée sinusoïdales, permet de prédire le comportement du système pour un signal quelconque (en tant que somme de signaux sinusoïdaux).

22 Étude harmonique



Définition Étude harmonique

L'étude harmonique d'un système linéaire, consiste à analyser son comportement en régime permanent (dit aussi régime établi), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude A et de pulsation ω . Soit :

$$e(t) = A \sin(\omega t)$$

La réponse d'un SLCI à une entrée sinusoïdale de pulsation ω est un signal sinusoïdal de même pulsation. Son amplitude B et l'éventuel déphasage qu'il présente par rapport au signal d'entrée sont significatifs du comportement du système et varient en fonction de la pulsation.

Si on pose $s(t) = B \sin(\omega t + \phi)$, faire l'étude harmonique du système, revient à étudier les variations de B et de ϕ , en fonction de ω .

Remarque : On ne s'intéresse ici qu'à la réponse du système à une entrée sinusoïdale (ce n'est plus un Dirac, un échelon, ni une rampe).

Considérons un système de fonction de transfert $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$, on peut l'écrire sous une forme générique comme un rapport de polynômes :

$$F(p) = \frac{Num(p)}{Denom(p)} = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

22.1 Régime sinusoïdal permanent $\Leftrightarrow p = j\omega$

Nous allons montrer que, lorsque le régime sinusoïdal permanent imposé par l'entrée est atteint, la réponse fréquentielle peut être calculée en remplaçant p par $j\omega$ dans la fonction de transfert $F(p)$: cette réponse fréquentielle est une sinusoïde d'amplitude $A \times |F(j\omega)|$ qui est déphasée par rapport à la sinusoïde d'entrée de $\phi = \arg(F(j\omega))$.

Rappelons d'abord que la réponse forcée d'un système ne dépend pas des conditions initiales. Nous pouvons donc supposer que les conditions initiales sont nulles. Par conséquent, si tous les pôles de la fonction de transfert sont simples, la réponse fréquentielle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} S(p) &= F(p) \times E(p) \\ &= F(p) \times \frac{\omega A}{p^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\alpha}{p + j\omega} + \frac{\alpha^*}{p - j\omega} + \frac{\beta_1}{p - p_1} + \dots + \frac{\beta_n}{p - p_n} \end{aligned}$$

Où α et les β_i sont des constantes réelles et α^* est le conjugué de α .

La transformée de Laplace inverse s'écrit :

$$y(t) = \alpha e^{-j\omega t} + \alpha^* e^{j\omega t} + \beta_1 e^{p_1 t} + \dots + \beta_n e^{p_n t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Puisque nous voulons observer le régime permanent sinusoïdal imposé par l'entrée, nous devons supposer que le régime transitoire disparaît, c'est-à-dire que le système est stable. Dans ces conditions, les termes $\beta_1 e^{p_1 t}, \dots, \beta_n e^{p_n t}$ tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. En régime permanent, la réponse est donc représentée par les deux premiers termes $\alpha e^{-j\omega t}$ et $\alpha^* e^{j\omega t}$.

Lorsque la fonction de transfert a des pôles multiples de multiplicité k_i , la réponse est formée de termes de la forme $Q_i(t)e^{p_i t}$ où $Q_i(t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k_i - 1$. Si le système est stable, lorsque $t \rightarrow \infty$, ces termes tendent eux aussi vers 0.

La réponse en régime permanent pour une entrée sinusoïdale est donc de la forme :

$$y(t) = \alpha e^{-j\omega t} + \alpha^* e^{j\omega t}$$

Les coefficients α et α^* peuvent être calculés à partir de la décomposition en éléments simples de la façon suivante :

$$\alpha = F(p) \frac{\omega A}{p^2 + \omega^2} (p + j\omega)|_{p=-j\omega} = -\frac{AF(-j\omega)}{2j}$$

$$\alpha^* = F(p) \frac{\omega A}{p^2 + \omega^2} (p - j\omega)|_{p=j\omega} = \frac{AF(j\omega)}{2j}$$

Puisque $F(j\omega)$ est un nombre complexe, on peut l'écrire sous la forme $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi}$. L'expression de $y(t)$ devient alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{A|F(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{A|F(j\omega)|e^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} \\ &= A|F(j\omega)| \frac{e^{j\omega t + \phi} - e^{-j\omega t + \phi}}{2j} \\ &= A|F(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Le signal de sortie est donc bien une sinusoïde de pulsation ω égale à celle de l'entrée, d'amplitude $B = A|F(j\omega)|$ et déphasée de $\phi = \arg(F(j\omega))$ (c.f. FIGURE 41).

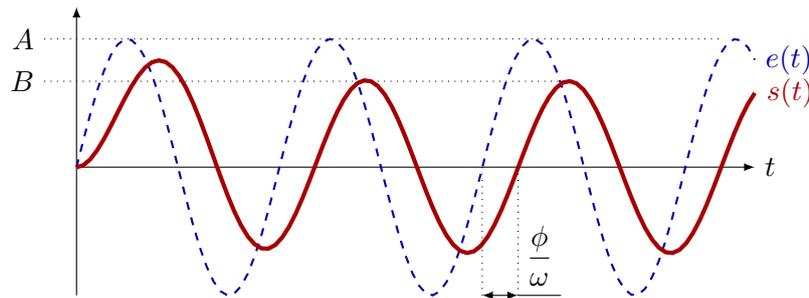


FIGURE 41 – Signaux sinusoïdaux d'entrée et de sortie d'un système linéaire.

On notera donc que, pour obtenir les caractéristiques de la sortie, il suffit de remplacer p par $j\omega$ dans la fonction de transfert du système :

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = F(j\omega)$$

22.2 Transmittance complexe



Définition Transmittance complexe

$F(j\omega)$ est appelée *fonction de transfert complexe* ou *transmittance complexe* du système. On parle aussi de *réponse fréquentielle* puisque la connaissance de $F(j\omega)$ est suffisante pour pouvoir écrire l'expression de la réponse du système à une fréquence particulière.

$F(j\omega)$ est un nombre complexe, caractérisé par son *module* et son *argument*. Le module est fréquemment appelé *gain*. Ce terme ne doit pas être confondu avec le *gain statique* K : on l'emploie

pour parler de l'évolution du module de $F(j\omega)$ en fonction de la pulsation. L'argument de $F(j\omega)$ peut être *positif*, on parle alors *d'avance de phase*, ou *négatif* et l'on a alors un *retard de phase*.



Remarque

Pour établir la notion de transmittance complexe, nous avons dû supposer que le système était stable. Dans le cas contraire, la notion de régime permanent sinusoïdal n'a physiquement pas de sens. Mais mathématiquement, rien n'empêche de représenter un système instable par $F(j\omega)$ obtenu à partir de $F(p)$ en remplaçant p par $j\omega$.

22.3 Réponse à une entrée sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

Soit un système du 1^{er} ordre représenté par sa fonction de transfert $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ que l'on soumet à une entrée de la forme $e(t) = E_0 \sin(\omega t) \cdot u(t)$ de transformée de Laplace $\frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$.

$$\text{On a alors : } S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{A}{1 + \tau p} + \frac{Bp + C}{p^2 + \omega^2} = \frac{KE_0}{\tau^2 \omega^2 + 1} \left[\frac{\tau^2 \omega}{1 + \tau p} + \frac{\omega - \tau \omega p}{p^2 + \omega^2} \right].$$

Par application de la transformée inverse de Laplace, il vient :

$$s(t) = \frac{KE_0}{\tau^2 \omega^2 + 1} \left[\tau \omega e^{-t/\tau} + \sin \omega t - \tau \omega \cos \omega t \right]$$

$$\text{On pose alors } \sin \varphi = -\frac{\tau \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \text{ et } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}.$$

$$\text{On obtient donc } s(t) = KE_0 \cdot \left[\frac{\tau \omega}{\tau^2 \omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right].$$

La solution s'écrit sous la forme de la somme d'une exponentielle amortie (*régime transitoire*) et d'un sinus (*régime permanent*). Le régime transitoire durera plus ou moins longtemps en fonction de la valeur de la constante de temps du système τ et de la pulsation d'excitation ω .

23 Gain et déphasage temporel d'une étude harmonique

23.1 Mesure du gain

En FIGURE 42 on a deux réponses à une sollicitation harmonique (en vert et en rouge). La mesure du gain, se fait en régime permanent et s'obtient en faisant le rapport des amplitudes des sinusoïdes (sortie sur entrée) :

$$\text{Gain}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{B}{A} \right)$$

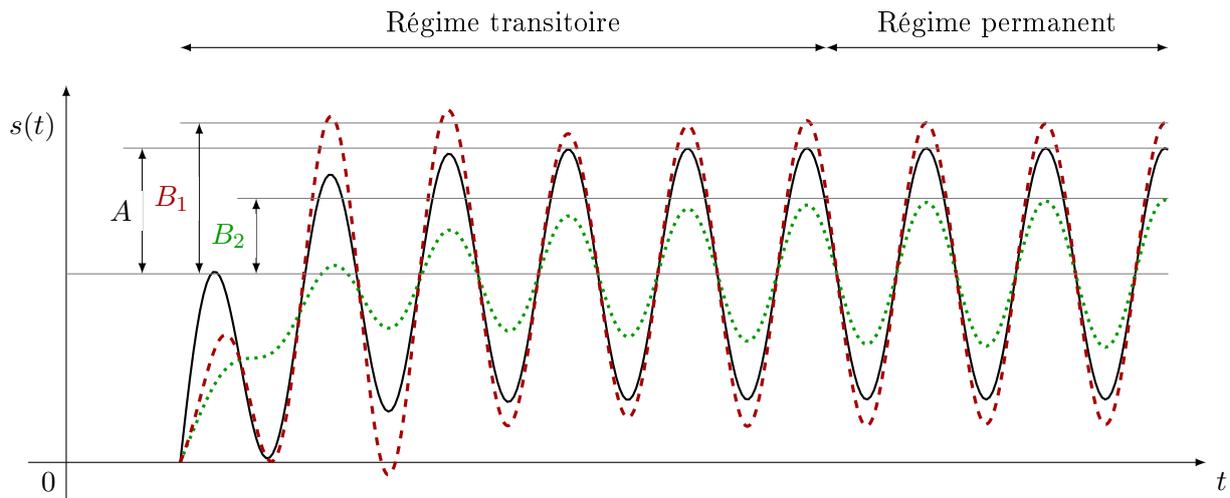


FIGURE 42 – Réponses à un un signal sinusoïdal. La consigne est en noir/continu et les deux signaux de sortie sont en rouge/tiret (---s₁) et vert/pointillé (...s₂). Les signaux sont en phase, mais ont un gain différent.

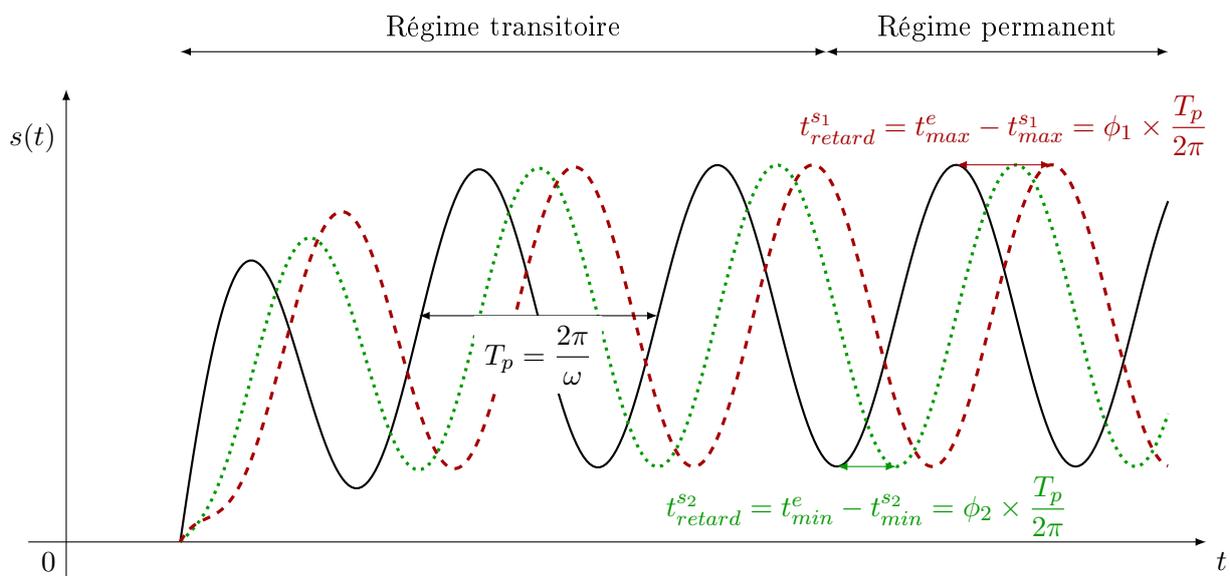


FIGURE 43 – Réponses à un un signal sinusoïdal. La consigne est en noir/continu et les deux signaux de sortie sont en rouge/tiret (---s₁) et vert/pointillé (...s₂). Les signaux ont le même gain, mais sont déphasés les uns par rapports aux autres. Ici on remarque que les signaux de sortie sont en retard, la phase est donc négative (et les temps de retard également).

23.2 Mesure du déphasage

En FIGURE 43, on a deux réponses à une sollicitation harmonique (s₁ et s₂). La mesure du déphasage se fait en régime permanent et s’obtient en mesurant les temps de retard de chaque sortie.

$$e(t) = A \cos(\omega t)$$

$$s(t) = B \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned}\cos(\omega t^{\text{entre}}) &= \cos(\omega t^{\text{sortie}} + \phi) \\ \omega t^{\text{entre}} &= \omega t^{\text{sortie}} + \phi\end{aligned}$$

$$\phi = \omega(t^{\text{entre}} - t^{\text{sortie}}) \quad \phi \text{ [rad]} = \frac{2\pi}{T_p}(t^{\text{entre}} - t^{\text{sortie}}) \quad \phi \text{ [degré]} = \frac{360}{T_p}(t^{\text{entre}} - t^{\text{sortie}})$$

24 Représentation complexe

Considérons un système d'ordre 1, régi par l'équation différentielle :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

On passe dans le domaine de Laplace (en considérant nulles les différentes conditions initiales), pour obtenir :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

On associe au signal d'entrée $e(t)$ une *représentation complexe* notée $E(j\omega)$ définie par $E(j\omega) = Ae^{j\omega t}$ et dont $e(t)$ est en fait la partie réelle.

$$E(j\omega) = Ae^{j\omega t} = A[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

On associe au signal de sortie une représentation complexe $S(j\omega)$ qui s'écrit :

$$S(j\omega) = Be^{j\omega t + \varphi} = B[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

Si on utilise ces expressions complexes dans l'équation différentielle, on obtient :

$$TBj\omega e^{j\omega t + \varphi} + Be^{j\omega t + \varphi} = KAe^{j\omega t}$$

Soit après simplifications :

$$\frac{B}{A} e^{j\varphi} = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

24.1 Gain et déphasage d'une fonction de transfert du premier ordre

La fonction $\frac{K}{1 + jT\omega}$ est la fonction de transfert $G(p)$ avec $p = j\omega$, on l'appelle la *fonction de transfert de fréquence* du système.

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

Le *gain* du système (rapport d'amplitude entre la sortie et l'entrée) est donné par :

$$\text{Gain}(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

Le *déphasage* entre la sortie et l'entrée est donné par :

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{1 + jT\omega}\right) = -\arctan(T\omega)$$

25 Représentation graphique du comportement harmonique

Afin de posséder une représentation graphique du comportement harmonique du système, il est naturel d'envisager le tracé des fonctions de ω qui en sont représentatives, c'est-à-dire de $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$. Il existe plusieurs méthodes de représentation graphique de ces fonctions que l'on utilise en fonction des résultats que l'on souhaite mettre en évidence, nous verrons seulement la représentation de Bode (les autres n'étant pas au programme) :

- le diagramme de Bode ;
- le diagramme de Nyquist (plan complexe).

25.1 Échelle logarithmique

Les systèmes étudiés s'étendent généralement sur de larges plages de fréquences (exemple, les cordes d'un piano oscillent à des fréquences comprises entre 27,5 et 4 186 Hz). Une échelle linéaire pour l'axe des abscisses (correspondant à l'axe des pulsations ω) serait donc mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique pour représenter l'évolution de la pulsation du signal. Elle correspond au tracé de $\log \omega$ sur un axe.



FIGURE 44 – Échelle linéaire à gauche et logarithmique à droite.

25.2 Diagramme de Bode



Définition *Diagramme de Bode*

Il est constitué de deux diagrammes semi-logarithmiques (axes des abscisses gradués en $\log \omega$, et axes des ordonnées en échelle linéaire) :

- le *diagramme de gain*, exprimé en décibel [dB] : $G_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$;
- le *diagramme de phase* $\varphi = \arg [G(j\omega)]$, exprimé en degrés ou radians.

L'exploitation complète de ces diagrammes nécessite une vision simultanée des deux courbes, elles figurent donc sur un même graphique avec l'axe des abscisses en commun (*c.f.* FIGURE 45).

Remarque :

- une octave correspond à une multiplication par 2 en pulsation ;
- une décade correspond à une multiplication par 10 en pulsation ;
- par définition, le logarithme décimal du rapport des puissances de sortie P_s et d'entrée P_e de deux signaux s'exprime en bel, $\log_{10} \frac{P_s}{P_e}$ ou en décibel $10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e}$. Toutefois, en automatique ou en électronique, il est plus facile d'obtenir l'amplitude d'un signal que sa puissance. Or, par analogie électrique, $P = \frac{U^2}{R}$ soit $10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 20 \log_{10} \frac{U_s}{U_e}$ d'où le facteur 20 utilisé pour déterminer le gain en dB.

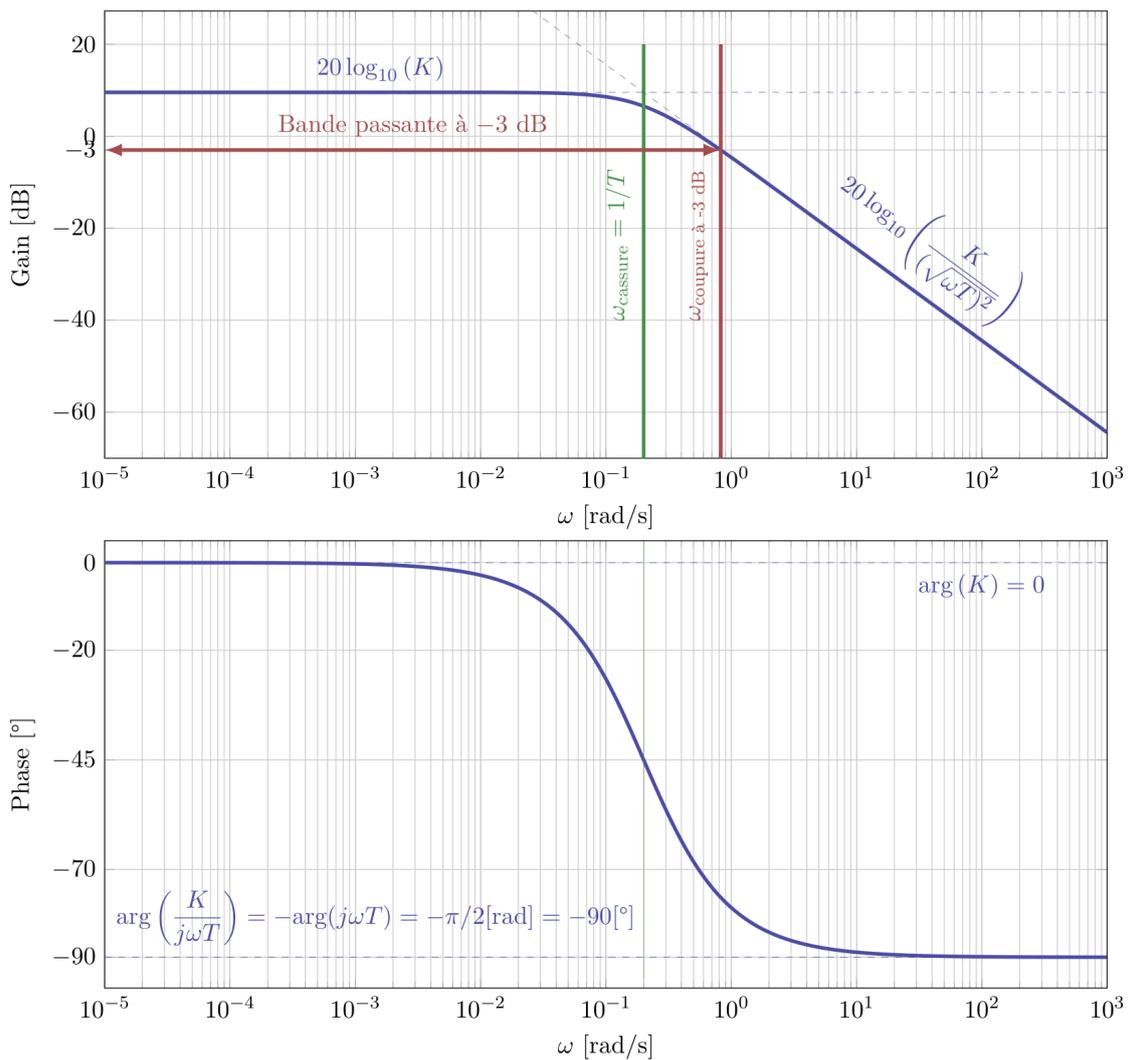


FIGURE 45 - Diagramme de Bode d'un système d'ordre 1. Avec le gain réel $G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \right)$ et la phase réelle $\varphi = \arg \left(\frac{K}{1 + j\omega T} \right)$

25.3 Tracés asymptotiques du diagramme de Bode

Ces tracés approchés (asymptotiques) sont obtenus en remplaçant les courbes des diagrammes de Bode par leurs approximations asymptotiques. Ces diagrammes permettent d'apprécier globalement le comportement du système modélisé à 10 % ou 20 % près. Compte tenu des imprécisions sur les valeurs réelles des paramètres du modèle, une telle précision s'avère souvent suffisante (en général, l'approximation est moins bonne pour le diagramme de phase). Les calculs des asymptotes et des valeurs particulières se font en général pour les valeurs particulières et extrêmes de la pulsation ω par rapport à la pulsation de cassure ω_0 du système : $\omega \ll \omega_0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

25.4 Propriétés des diagrammes de Bode

On utilise constamment ces propriétés car, dans la majorité des cas, la fonction de transfert étudiée est un produit de fonctions de transfert du premier et deuxième ordre. Ces deux systèmes seront donc étudiés en détails dans la suite de ce cours.

- Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{F}(j\omega) \times \underline{G}(j\omega)$ alors :
 - ◊ $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log |\underline{F}(j\omega)| + 20 \log |\underline{G}(j\omega)|$, les *courbes de gain s'additionnent* ;
 - ◊ $\varphi = \arg [\underline{H}(j\omega)] = \arg [\underline{F}(j\omega)] + \arg [\underline{G}(j\omega)]$, les *courbes de phases s'additionnent*.
- Si $\underline{H}(j\omega) = K \times \underline{F}(j\omega)$, avec K une constante ($K > 0$), alors :
 - ◊ $G_{dB} = 20 \log K + 20 \log |\underline{F}(j\omega)|$, la courbe de gain de $\underline{F}(j\omega)$ est translatée de $20 \log K$;
 - ◊ $\varphi = \arg(K) + \arg [\underline{F}(j\omega)] = \arg [\underline{F}(j\omega)]$, la phase est la même que celle de $\underline{F}(j\omega)$.

25.5 Bande Passante

La bande passante à -3 dB d'un système, est la plage de pulsations (ou de fréquences) $[0, \omega_{\text{coupure}}]$ pour lesquelles l'atténuation du signal de sortie ne dépasse pas 30% de sa valeur lorsque $\omega \rightarrow 0$. ω_{coupure} est appelée pulsation de coupure à -3 dB.

Plus un système est rapide, plus sa bande passante est grande. Elle donne donc une indication sur le critère de rapidité.

Pour un système du 1^{er} ordre, la bande passante à -3 dB est $[0, \omega_{\text{coupure}}]$, avec $\omega_{\text{coupure}} = \frac{1}{\tau}$.

Pour un système du 2nd ordre, la bande passante à -3 dB est $[0, \omega_{\text{coupure}}]$, avec ω_{coupure} la pulsation de coupure telle que $\log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{coupure}}}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{2 \times \xi \times \omega_{\text{coupure}}}{\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{3}{10}$.

Parfois, on définit la bande passante à x dB comme la plage de pulsations (ou de fréquences) $[0, \omega_{\text{coupure}}]$ pour lesquelles le gain en dB reste supérieur à x dB.

26 Diagrammes de Bode asymptotiques de FT élémentaires

FT	Diagramme de gain	Diagramme de phase
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$		
$H(p) = 1 + \tau p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $z \leq 1$		
$H(p) = 1 + 2\frac{z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$ avec $z \leq 1$		

27 Méthode d'approximation $(G, \frac{1}{H})$

En régime fréquentiel on peut écrire :

$$L(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega) \times H(j\omega)}$$

ce qui peut s'écrire :

$$L(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega)}{G(j\omega) + \frac{1}{H(j\omega)}}$$

donc $L(j\omega)$ s'exprime à partir de $G(j\omega)$ et de $\frac{1}{H(j\omega)}$.

Si on s'intéresse au gain, on a :

$$|L(j\omega)| = \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right| \times \frac{|G(j\omega)|}{\left| G(j\omega) + \frac{1}{H(j\omega)} \right|}$$

La méthode d'approximation s'appuie sur le raisonnement suivant :

1. si $|G(j\omega)| \gg \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right|$, alors $\left| G(j\omega) + \frac{1}{H(j\omega)} \right| \simeq |G(j\omega)|$, et donc :

$$|L(j\omega)| \simeq \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right|$$

2. si $|G(j\omega)| \ll \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right|$, alors on arrive à :

$$|L(j\omega)| \simeq |G(j\omega)|$$

En résumé, l'approximation de $|L(j\omega)|$ est donné, selon la bande de fréquence, par le plus petit des modules de $G(j\omega)$ ou de $\frac{1}{H(j\omega)}$.

Naturellement, aux points d'intersection des courbes $|G(j\omega)|$ et $\frac{1}{H(j\omega)}$, l'approximation n'a pas de sens, puisqu'on ne peut prétendre que $|G(j\omega)| \gg \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right|$, ni l'inverse.

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
ÉTUDE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES CONTINUS

Décomposition en série de Fourier

- L'analyse spectrale peut permettre de prédire le comportement d'un système selon la décomposition du signal d'entrée. De plus, il permet de prédire la stabilité d'un système par analyse du point critique.

Étude harmonique

- L'étude harmonique s'intéresse à la réponse du système, lorsque l'entrée est un signal sinusoïdal. On peut alors simplifier la variable de Laplace $p = \tau + j\omega$, par $p = j\omega$ pour obtenir l'expression de la fonction de transfert complexe ou transmittance complexe $F(j\omega)$.

Gain et déphasage temporel d'une étude harmonique

- Le *gain* du système (rapport d'amplitude entre la sortie et l'entrée) est donné par :

$$\text{Gain}_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{B}{A} \right)$$

- Le *déphasage* entre la sortie et l'entrée est donné par :

$$\varphi(\omega) = \Delta t \times \frac{360}{T_n} \text{ [deg]} = \Delta t \times \frac{2\pi}{T_n} \text{ [rad]}$$

Représentation complexe

- Le *gain* du système (rapport d'amplitude entre la sortie et l'entrée) est donné par :

$$\text{Gain}_{dB}(\omega) = |G(j\omega)|$$

- Le *déphasage* entre la sortie et l'entrée est donné par :

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

Représentation graphique du comportement harmonique

- Le diagramme de Bode comporte deux graphes, le gain en décibels $G_{dB}(\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$;
- Le diagramme de Nyquist est le plan complexe, des points M de coordonnées $\text{Re}(\omega)$ et $\text{Im}(\omega)$;
- Les propriétés du logarithme (pour le gain) et de l'exponentielle (pour l'argument), permettent de justifier que :

$$G_{dB}(F \times G) = G_{dB}(F) + G_{dB}(G)$$

$$\arg(F \times G) = \arg(F) + \arg(G)$$

- La bande passante est la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle le signal de sortie a une amplitude qui n'est pas négligée.

Deux approches expérimentales sont à considérer :

Identification temporelle (la sortie est enregistrée en fonction du temps) et *identification fréquentielle* (on mesure le gain et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée en fonction de la pulsation d'excitation).

Pour l'identification temporelle, deux cas sont à considérer : Identification en chaîne ouverte (le système n'est pas asservi) et identification en chaîne fermée (un régulateur asservit le système).

28 Identification temporelle

On envoie un signal d'entrée $e(t)$ connu (impulsion de Dirac, échelon d'amplitude A ou rampe de pente B) et on enregistre le signal de sortie $s(t)$ à analyser par la suite.

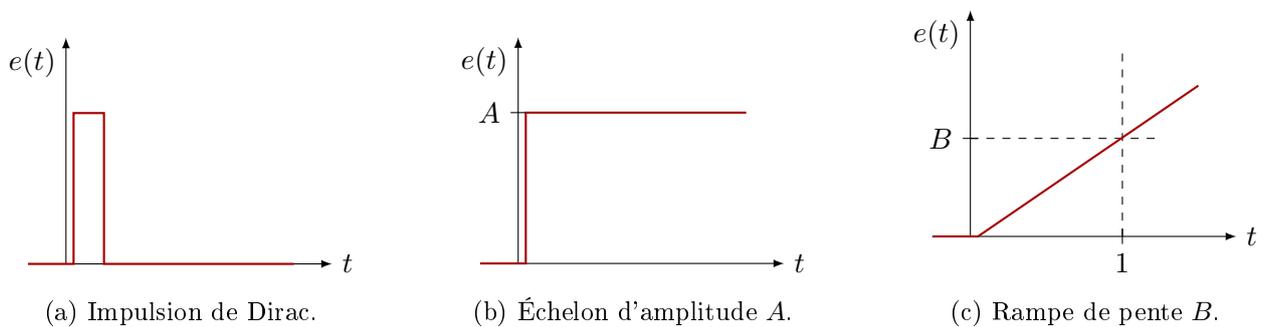


FIGURE 46 – Signaux d'entrée.

Dans la suite, nous allons étudier uniquement la réponse à un échelon.

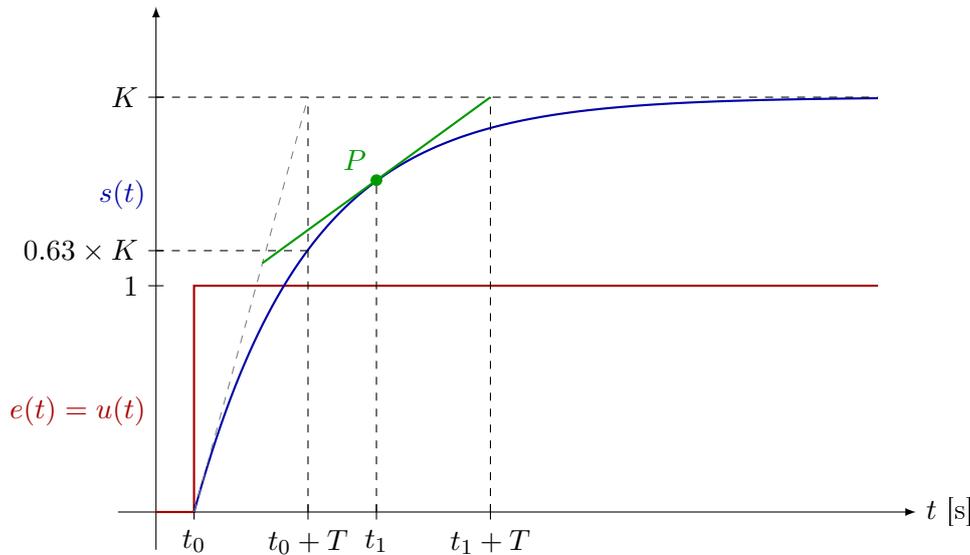
28.1 Système du premier ordre

La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$. La réponse à un échelon $e(t) = A \times u(t) \rightarrow E(p) = \frac{A}{p}$ donne une sortie $S(p) = \frac{K A}{p(1 + \tau p)}$. Après décomposition en éléments simples et transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$s(t) = K A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

On a alors les propriétés suivantes :

- $t_{5\%} \simeq 3\tau$;
- $s(\tau) = 0.63 \times K A$;
- $s(3\tau) = 0.95 \times K A$;
- La courbe n'admet pas de point d'inflexion (variation de signe de la courbure) ;
- L'asymptote en 0 (ou asymptote à l'origine) coupe l'asymptote en régime permanent en τ ;
- En tout point P de la courbe d'abscisse t , la tangente à la courbe en ce point coupe l'asymptote en régime permanent à l'abscisse $t + \tau$.

FIGURE 47 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 1, pour un gain $K > 1$.

28.2 Système du second ordre

Pour cette identification on peut distinguer les réponses *pseudo-périodiques* des *apériodiques*.

28.2.1 $\xi < 1$: régime pseudo-périodique

La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$. La réponse à un échelon $e(t) = A \times u(t) \rightarrow E(p) = \frac{A}{p}$ donne une sortie $S(p) = \frac{K A}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2\right)}$.

La sortie temporelle est obtenue par décomposition en éléments simples et transformée de Laplace inverse. On obtient alors :

$$s(t) = K A \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

- La pseudo-pulsation est $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ avec T_n la pseudo-période observée sur la courbe temporelle ;
- Le premier dépassement relatif est $D_1 = \frac{s(t_1) - s(t \rightarrow \infty)}{s(t \rightarrow \infty)} = \frac{D_1^{\text{absolu}}}{K A} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$;
- Le coefficient d'amortissement est $\xi = \sqrt{\frac{\ln(D_1)^2}{\ln(D_1)^2 + \pi^2}}$;
- Le temps du premier pic $s(t_1)$ est $t_1 = \frac{T_n}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$;
- Le temps de réponse à 5% est défini par l'abaque du temps de réponse réduit.

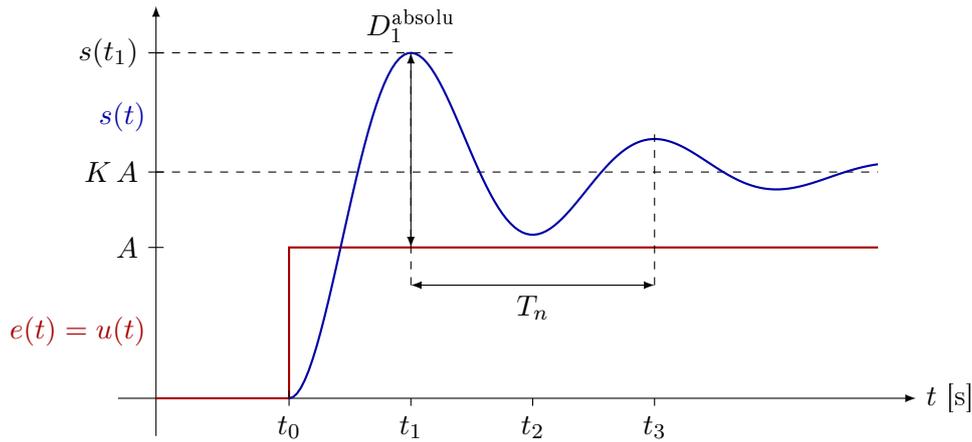
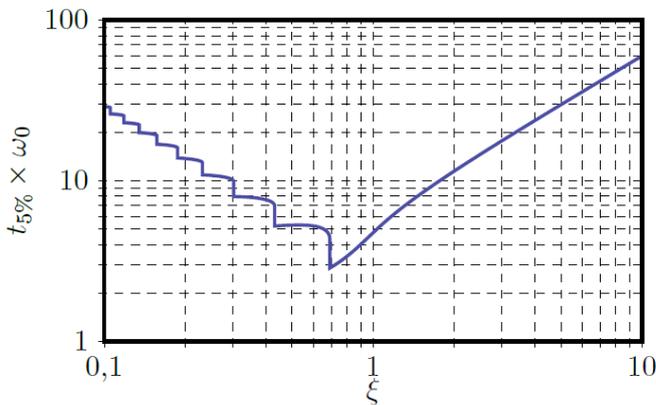
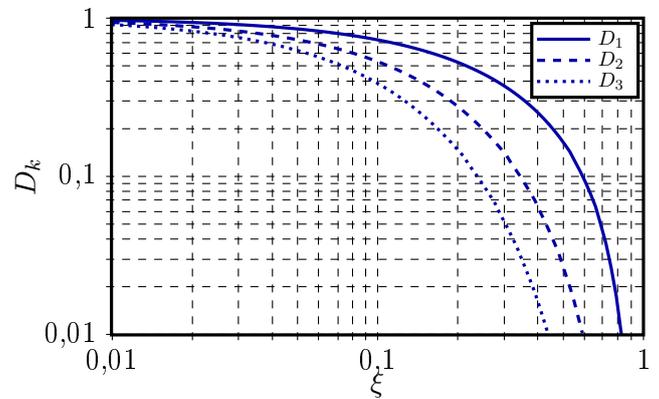


FIGURE 48 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 2, pour $\xi < 1$ et $K > 1$.



(a) Abaque du temps de réponse réduit.



(b) Abaque des dépassements transitoires relatifs.

FIGURE 49 – Abaque pour un système du second ordre.

28.2.2 $\xi \geq 1$: régime aperiodique

La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$.

La réponse à un échelon $e(t) = A \times u(t) \rightarrow E(p) = \frac{A}{p}$ donne une sortie $S(p) = \frac{KA}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$.

La sortie temporelle est obtenue par décomposition en éléments simples et transformée de Laplace inverse. On obtient alors :

$$s(t) = KA \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Si $T_1 \ll T_2$, la constante de temps T_2 est dite dominante.

- La tangente au point d'inflexion I et son intersection avec l'axe des abscisses donne la constante de temps T_1 ;
- La tangente au point d'inflexion I et son intersection avec l'asymptote horizontale donne la constante de temps $T_1 + T_2$;
- Le temps permettant d'arriver à 63% de la valeur finale vaut $T_1 + T_2$;
- On peut considérer qu'après 63% de la valeur finale, le système se comporte comme un premier ordre de constante de temps T_2 , donc en tout point de la courbe d'abscisse $t > t_{63\%}$, la tangente à la courbe en ce point coupe l'asymptote finale à l'abscisse $t + T_2$.

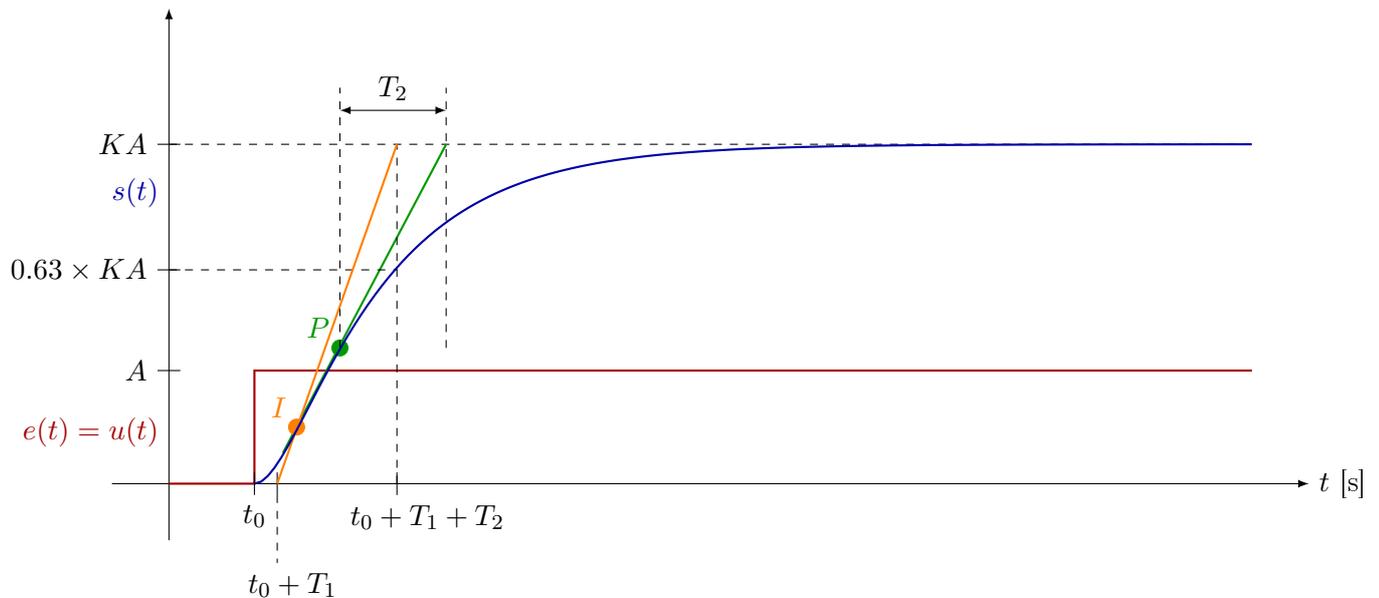


FIGURE 50 – Réponse à un échelon $A \times u(t)$ d'un système d'ordre 2, pour $\xi \geq 1$ et $K > 1$.

29 Identification fréquentielle

La méthode consiste à appliquer, pour une fréquence donnée, une entrée sinusoïdale d'amplitude et de phase connues (A_1 et φ_1) et enregistrer le signal de sortie qui présente d'autres valeurs d'amplitude et de phase (A_2 et φ_2). En faisant varier la fréquence, le gain ($G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)$) et le déphasage ($\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$) peuvent être représenté dans le plan de Bode.

29.1 Système du premier ordre

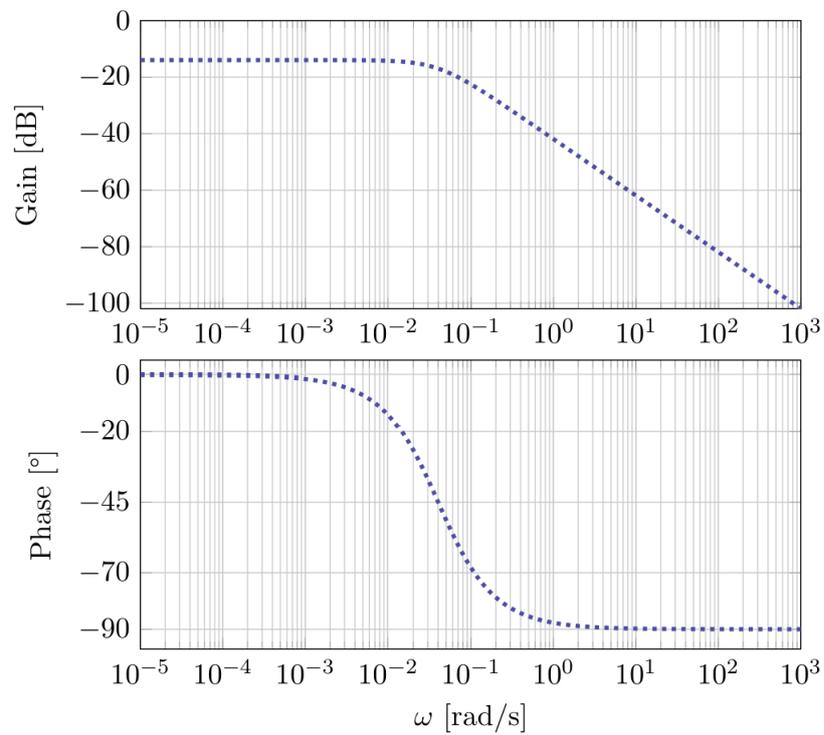


FIGURE 51 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(p) = \frac{0.2}{1 + 25 \times p}$.

29.2 Système du second ordre, de classe une

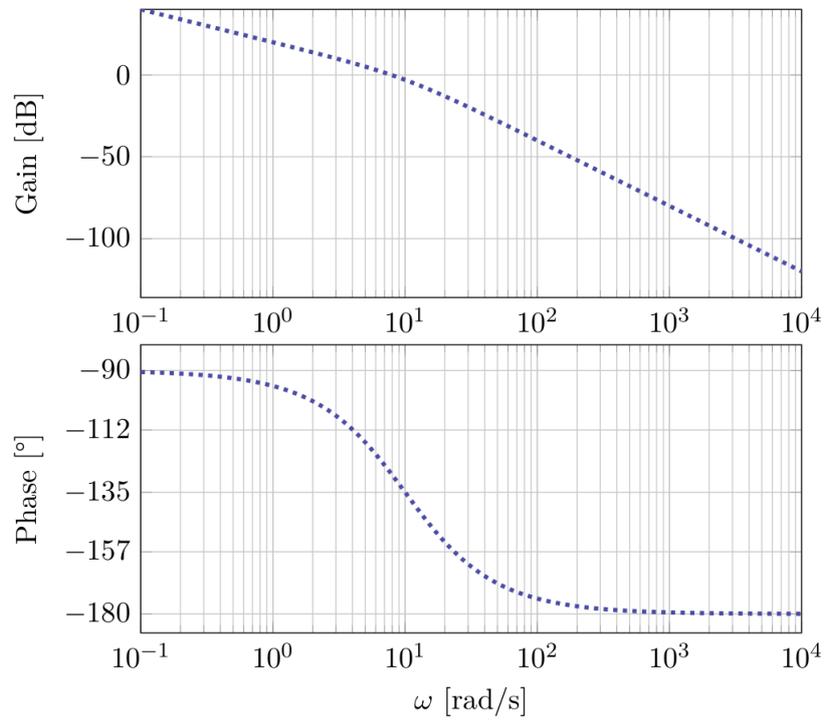


FIGURE 52 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(p) = \frac{10}{p(1 + 0.1 \times p)}$.

29.3 Système du second ordre, de classe zéro - $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

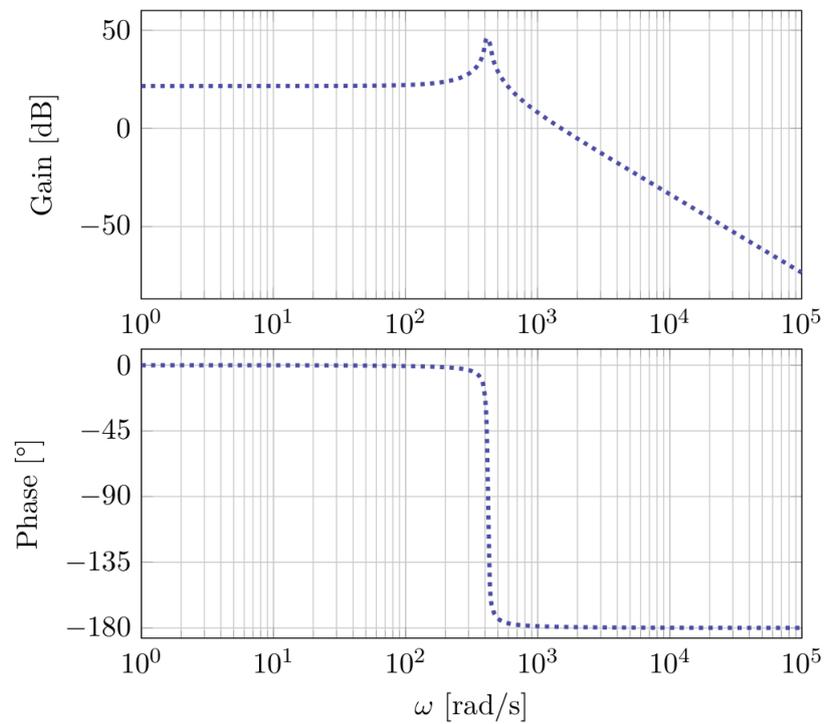


FIGURE 53 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(p) = \frac{12}{\left(1 + \frac{2 \times 0.02}{420} \times p + \frac{1}{420^2} \times p^2\right)}$.

29.4 Système du second ordre, de classe zéro - $\xi > 1$

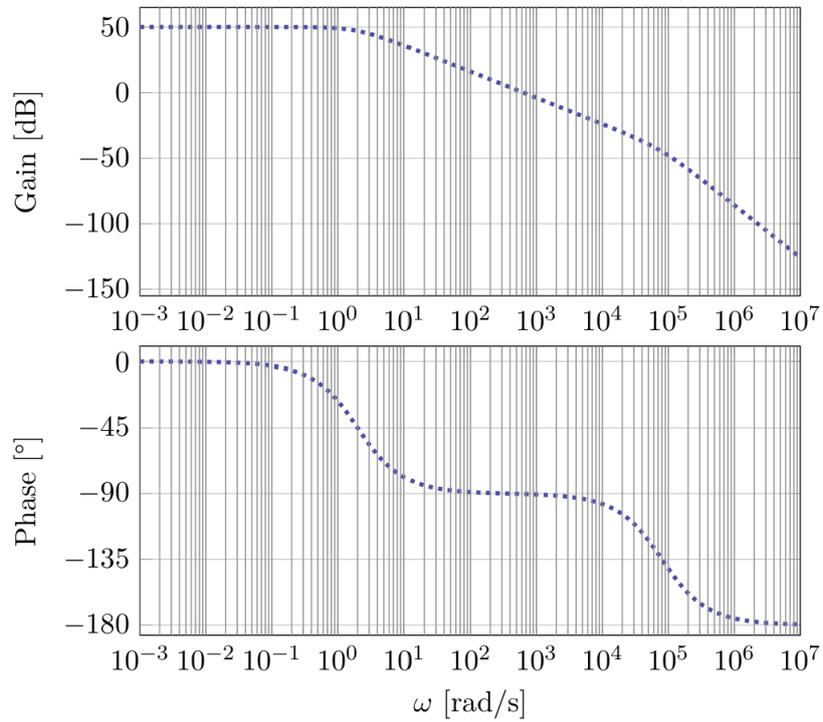


FIGURE 54 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(p) = \frac{321}{\left(1 + \frac{2 \times 100}{400} \times p + \frac{1}{400^2} \times p^2\right)}$.

Synthèse

MODÉLISATION ET ÉTUDE DES SLCI
IDENTIFICATION TEMPORELLE ET FRÉQUENTIELLE

Identification temporelle

Le signal d'entrée pour l'identification temporelle est un échelon. On relève les caractéristiques suivantes en fonction de l'ordre du système étudié : - 1^{er} ordre :

- $t_{5\%} \simeq 3\tau$;
- $s(\tau) = 0.63 \times K A$;
- $s(3\tau) = 0.95 \times K A$;
- La courbe n'admet pas de point d'inflexion ;
- L'asymptote à l'origine coupe l'asymptote en régime permanent en τ ;
- En tout point P de la courbe d'abscisse t , la tangente à la courbe en ce point coupe l'asymptote en régime permanent à l'abscisse $t + \tau$.

- 2nd ordre pseudo-périodique :

- $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$;
- $D_1 = \frac{s(t_1) - s(t \rightarrow \infty)}{s(t \rightarrow \infty)} = \frac{D_1^{\text{absolu}}}{K A} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$;
- $\xi = \sqrt{\frac{\ln(D_1)^2}{\ln(D_1)^2 + \pi^2}}$;
- $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$;

- Le temps de réponse à 5% est défini par l'abaque du temps de réponse réduit.

- 2nd ordre apériodique avec $T_1 \ll T_2$:

- La tangente au point d'inflexion I et son intersection avec l'axe des abscisses donne la constante de temps T_1 ;
- La tangente au point d'inflexion I et son intersection avec l'asymptote horizontale donne la constante de temps $T_1 + T_2$;
- Le temps permettant d'arriver à 63% de la valeur finale vaut $T_1 + T_2$;
- En tout point de la courbe d'abscisse $t > t_{63\%}$, la tangente à la courbe en ce point coupe l'asymptote finale à l'abscisse $t + T_2$.

Identification fréquentielle

- Une constante (K) donne un gain constant à $20\log_{10}(K)$ et une phase nulle ;
- Une intégration ($\frac{1}{p}$) donne un gain dont la pente est de -20 dB/décade et une phase à -90° ;
- Une dérivation (p) donne un gain dont la pente est de +20 dB/décade et une phase à $+90^\circ$;