INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

B. Landelle

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Rappels

Définition 1. *Soit $f \in \mathscr{F}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$. On dit que f est* continue par morceaux *sur $[\,a\,;b\,]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0\,;n]\!]}$, i.e. $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0\,; n-1]\!]$, la fonction f est continue sur $]\,a_i\,; a_{i+1}\,[$ et admet des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^-.*

Notations : On note $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$.

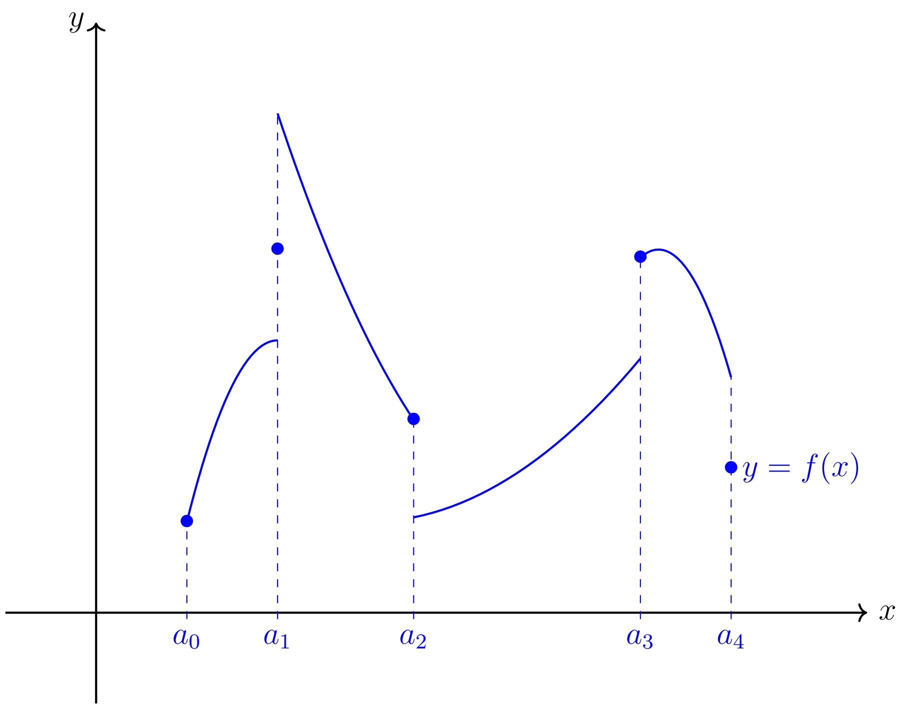

FIGURE 1 – Graphe d'une fonction continue par morceaux

Vocabulaire : Pour $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$, une subdivision σ vérifiant la propriété décrite dans la définition 1 est dite *adaptée* à f. Il n'y pas unicité d'une telle subdivision : si σ est adaptée et σ sous-suite de σ' (on dit que σ' est plus fine que σ), alors σ' est adaptée.

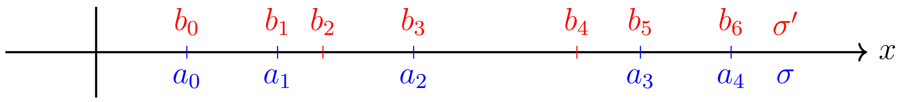

FIGURE 2 – Subdivisions adaptées

Définition 2. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. On dit que f est* continue par morceaux *sur I si, pour tout $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$, on a $f_{|_{[\,a\,;b\,]}} \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$.*

Notations : On note $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I. Cet ensemble est un $\mathbb{K}$-ev.

Exemples : 1. $\lfloor\cdot\rfloor \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. On pose $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \dfrac{1}{t} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $$f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f \notin \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$$

I Intégrale généralisée

1 Définitions

Définition 3. *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ *avec* $b \in \,]\,a\,;+\infty\,[\, \cup \{+\infty\}$. *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *(ou est* convergente*) si* $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* b *et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge *(ou est* divergente*).*

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$ *avec* $a \in \,]-\infty\,;b\,[\, \cup \{-\infty\}$. *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *(ou est* convergente*) si* $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* a *et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge *(ou est* divergente*).*

Vocabulaire : L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ notée aussi $\displaystyle\int_a^b f$ est dite intégrale *généralisée* ou *impropre* de f sur $[\,a\,;b\,[$, respectivement $]\,a\,;b\,]$. Deux intégrales sont dites de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

⚠ **Consigne importante :** Lors de l'étude d'une intégrale généralisée, on commence systématiquement par préciser la continuité par morceaux de l'intégrande sur l'intervalle concerné.

Remarque : Pour une intégrale divergente, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est qu'une notation. Ce n'est pas un élément de $\mathbb{K}$.

Exemples : 1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$: pour $x \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$: pour $x \in \,]\,0\,;1\,]$, on a $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$: pour $x \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$: pour $x \in]\,0\,;1\,]$, on a $\displaystyle\int_x^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2(1-\sqrt{x}) \xrightarrow[x\to0^+]{} 2$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$: pour n entier, on a $\displaystyle\int_0^{n\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1-(-1)^n$ et $n\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ce qui prouve l'absence de limite.

Proposition 1. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ avec $b \in]\,a\,;+\infty\,[\cup\{+\infty\}$ et $c \in [\,a\,;b\,[$ (respectivement $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$ avec $a \in]\,-\infty\,;b\,[\cup\{-\infty\}$ et $c \in]\,a\,;b\,]$). Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (respectivement $\displaystyle\int_a^b$ et $\displaystyle\int_a^c$) sont de même nature. En cas de convergence, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ et $c \in [\,a\,;b\,[$. La relation de Chasles usuelle donne

$$\forall x \in [\,a\,;b\,[\qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $x \to b$ si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $x \to b$. En cas de convergence, faisant tendre $x \to b$, on obtient

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Remarque : Ce résultat dit notamment que la nature d'une intégrale généralisée sur un intervalle semi-fermé est indépendante du choix de la borne fermée.

Définition 4. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ avec $a < b$ et $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$* converge *(ou est* convergente*) si il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

S'il existe $d \in]\,a\,;b\,[$ tel que $\displaystyle\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge *(ou est* divergente*).*

Vocabulaire : L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ notée aussi $\displaystyle\int_a^b f$ est appelée intégrale *généralisée* ou *impropre* de f sur $]\,a\,;b\,[$.

Remarque : S'il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors d'après la proposition 1, on a

$$\forall d \in \left]\, a\,;b\,\right[\qquad \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent}$$

Par négation de cette assertion, on retrouve bien la définition d'une intégrale sur $\left]\, a\,;b\,\right[$ divergente. Puis, pour $d \in \left]\, a\,;b\,\right[$

$$\int_a^d + \int_d^b = \begin{cases} \underbrace{\int_a^c + \underbrace{\int_c^d + \int_d^b}_{\text{prop 1}}}_{\text{def}} & \text{si } c \leqslant d \\ \underbrace{\underbrace{\int_a^d + \int_d^c}_{\text{prop 1}} + \int_c^b}_{\text{def}} & \text{si } d \leqslant c \end{cases} = \int_a^b$$

Autrement dit, la définition de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est indépendante du choix de $c \in \left]\, a\,;b\,\right[$.

Exemples : 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$: diverge puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Pourquoi on ne peut donner un sens à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$:

On a $\qquad \forall x > 0 \qquad \displaystyle\int_{-x}^{x} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\int_{-n\pi+\frac{\pi}{2}}^{n\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$: pour $x \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ d'où la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et donc aussi celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$: pour $x \leqslant 0$, on a $\displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ convergent et sont égales à 1. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$: converge et vaut π.

Remarque : Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, étant donnée F une primitive de f ayant des limites finies en a et b, on peut écrire directement

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_a^b$$

Par exemple $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}\ t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

Vocabulaire : Pour un intégrande continue par morceaux, la notion d'intégrale convergente est définie sur un intervalle semi-ouvert et ouvert. Si l'intervalle est un segment, l'intégrale est également considérée *convergente* ce qui fait sens puisqu'elle est bien définie. Enfin, pour $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a = \text{Inf I}$ et $b = \text{Sup I}$ (éventuellement infinis), on peut simplement discuter de la *convergence de l'intégrale en* a *et/ou* b (en une borne fermée, c'est immédiat).

2 Premières propriétés

Proposition 2. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ sont de même nature.*

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 3. *Soient f, g dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*

Démonstration. Supposons $\mathrm{I} = [\,a\,;b\,[$. On a par linéarité de l'intégrale

$$\forall x \in [\,a\,;b\,[\qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x (f + \lambda g)(t)\,\mathrm{d}t$$

Le terme de gauche admet une limite finie pour $x \to b$ et donc de même pour le terme de droite puis on passe à la limite. □

Proposition 4. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,, \mathbb{K})$ avec $b > a$ et f prolongeable par continuité en b (respectivement $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,a\,;b\,]\,, \mathbb{K})$ et f prolongeable par continuité en a). Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

Démonstration. Posons $\qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [\,a\,;b\,[\\ \lim\limits_{x \to b} f(x) & \text{si } x = b \end{cases}$

La fonction g est le prolongement de f par continuité en b donc $g \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,]\,, \mathbb{K})$. Par suite

$$\forall x \in [\,a\,;b\,[\qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \in [\,a\,;b\,[$, on a

$$\left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant (b - x)\|g\|_\infty \xrightarrow[x \to b]{} 0$$

autrement dit $$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b]{} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

□

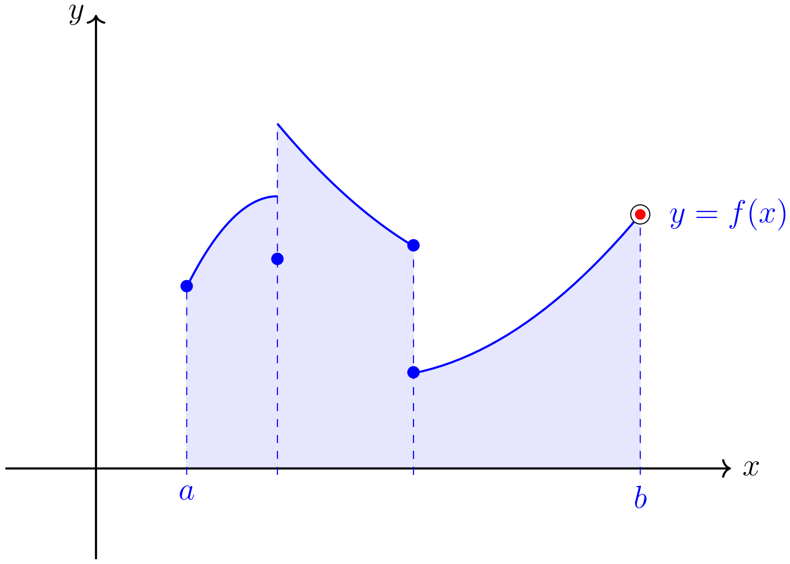

FIGURE 3 – Représentation d'une intégrale faussement impropre

Vocabulaire : L'intégrale est dite *faussement impropre* (pas de bornes infinies et pas de limites infinies).

Exemple :

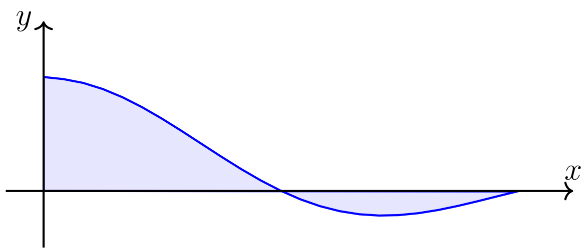

FIGURE 4 – Représentation de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

On a $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;2\pi\,]\,,\mathbb{R})$ prolongeable par continuité en zéro d'où la convergence de l'intégrale faussement impropre $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 5. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{C})$ avec $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.*

Dans ce cas, on a
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire
$$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Les fonctions Re et Im sont continues (car 1-lipschitziennes) d'où la continuité par morceaux de Re f et Im f.

Démonstration. Par propriétés sur les limites des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. $\square$

Proposition 6. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ avec $b \in\,]\,a\,;+\infty\,[\cup\{+\infty\}$ (respectivement $\mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{K})$ avec $a \in\,]\,-\infty\,;b\,[\,\cup\,\{-\infty\})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,[$ et $\Phi' = -f$ (respectivement $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,a\,;b\,]$ et $\Psi' = f$).*

Démonstration. Notons F une primitive de f. On a pour $x \in [\,a\,;b\,[$

$$\Phi(x) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)$$

Le résultat suit. □

Proposition 7. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que*

$$\forall t \in [\,a\,;+\infty\,[\qquad f(t) \geqslant \ell > 0$$

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration. On a

$$\forall x \geqslant a \qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \ell(x-a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

□

Remarque : On a le même résultat avec $\ell < 0$ et $f(t) \leqslant \ell < 0$.

Proposition 8. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. S'il existe ℓ réel tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$.*

Démonstration. Supposons $\ell > 0$. On dispose d'un seuil $t_0 \geqslant a$ tel que $f(t) \geqslant \ell/2$ pour $t \geqslant t_0$ d'où une contradiction d'après le résultat précédent. La preuve est identique si $\ell < 0$. Le résultat suit. □

Remarque : Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ positives, non bornées dont l'intégrale est convergente ! (voir plus tard)

3 Exemples fondamentaux

Proposition 9. *Soit α réel. On a*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha > 0$$

Si $\alpha > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$, on a $\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1$ pour $t \geqslant 0$ d'où la divergence de l'intégrale d'après la proposition 7. Si $\alpha \neq 0$, on a pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$$

Le résultat suit. □

Théorème 1 (Intégrales de Riemann). *Soit α un réel.*

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

   Si elle converge, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$.

   Si elle converge, on a $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

Démonstration. 1. Si $\alpha = 1$, pour $x \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \to +\infty$ pour $x \to +\infty$. Puis, si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right]$$

Le résultat suit.

2. Si $\alpha = 1$, pour $x \in \,]\,0\,;1\,]$, on a $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x \to +\infty$ pour $x \to 0^+$. Puis, si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]$$

Le résultat suit. □

Remarques : 1.

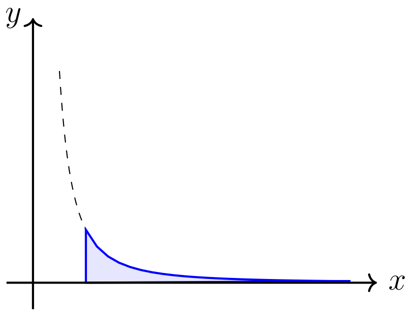

FIGURE 5 – Représentation de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

Il s'agit d'équivalences. Ainsi, par négation, on a pour la première équivalence

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ diverge} \iff \alpha \leqslant 1$$

2. ⚠ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est toujours divergente. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ diverge} \iff \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \text{ou} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ divergent} \iff \alpha \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad \geqslant 1$$

Cette dernière assertion étant vraie, on en déduit la divergence de l'intégrale considérée.

4 Comparaison pour des fonctions positives

Dans le cas de fonctions négatives, il suffit de considérer les opposés de celles-ci pour appliquer les résultats qui suivent.

Proposition 10. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ avec b éventuellement infini, positive (respectivement $\mathscr{C}_{pm}(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R}_+)$ avec a éventuellement infini). L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$).*

Démonstration. Comme f est positive, on a la croissance de $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f$. D'après le théorème de limite monotone, une fonction croissante est majorée sur $[\,a\,;b\,[$ si et seulement si elle admet une limite finie en b. La preuve est identique pour l'autre cas. □

Théorème 2 (Théorème de comparaison). *Soient f, g dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$ (éventuellement infinis) et f, g positives avec $f \leqslant g$.*

1. *Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*
2. *Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a*

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Si I est un segment, les intégrales convergent et on a l'encadrement annoncé. On traite le cas où I n'est pas un segment. On suppose $f, g \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R}_+)$. Comme f et g sont positives, on a la croissance des fonctions

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G} : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\forall x \geqslant a \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{G}(x)$$

1. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors F n'est pas majorée donc G non plus d'où la divergence de $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Par contraposition, on a l'implication attendue et passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a l'inégalité souhaitée.

La preuve est identique pour $]\,a\,;b\,]$ et le cas $]\,a\,;b\,[$ se déduit des cas précédents. □

Remarques : (1) ⚠ Attention à ne pas écrire **directement**

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie d'abord la convergence avant d'écrire l'encadrement.

(2) Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, le théorème ne dit rien sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, le théorème ne dit rien sur $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 1. *Soient f, g dans $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ avec $b \in \,]\,a\,;+\infty\,[\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$. Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Démonstration. Il existe $c \in [\,a\,;b\,[$ et $\mathrm{M} > 0$ tels que

$$\forall t \in [\,c\,;b\,[\qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}g(t)$$

Le résultat suit d'après le théorème de comparaison précédent. □

Remarques : (1) On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]\,a\,;b\,]$ avec $a \in \,]\,\text{-}\infty\,;b\,[\, \cup \{\text{-}\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a.
(2) Si $f = \mathrm{o}(g)$, alors $f = \mathrm{O}(g)$ et le corollaire précédent s'applique.

Exemples : 1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

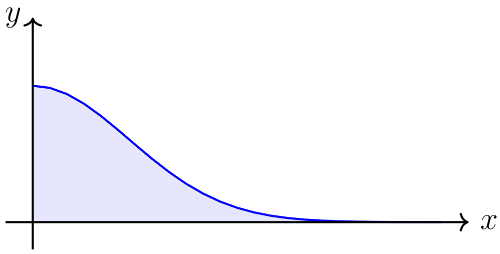

Figure 6 – Représentation de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

On a $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ positif et $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, il s'ensuit par comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également et elle est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Nature de $\displaystyle\int_0^{1} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

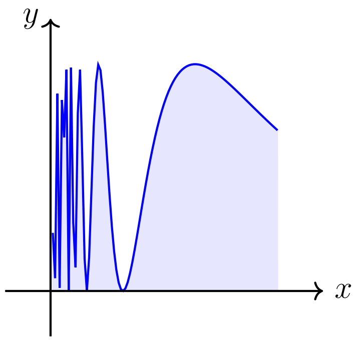

Figure 7 – Représentation de $\displaystyle\int_0^{1} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$

On a $t \mapsto \sin^2\left(\dfrac{1}{t}\right) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ positif et

$$\forall t \in \,]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant 1$$

Par comparaison, il s'ensuit que $\displaystyle\int_0^{1} \sin^2\left(\tfrac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ converge. Le résultat n'est pas trivial puisque l'intégrande n'admet pas de limite en zéro. Mais l'aire sous la courbe si.

3. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

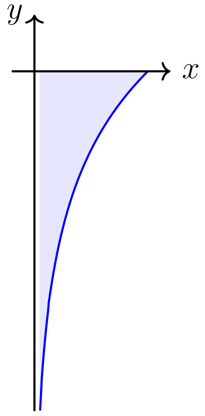

FIGURE 8 – Représentation de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$

On a $t \mapsto \ln(t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ négative et $-\ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On peut aussi écrire pour $x \in\,]\,0\,;1\,]$

$$\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)-t]_1^x) = -1 - x\ln(x) + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

par croissances comparées. On retrouve la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et on a $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$.

4. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{t}\,\mathrm{d}t$. On a $\forall t \geqslant \mathrm{e}$ $\quad \dfrac{\sqrt{\ln t}}{t} \geqslant \dfrac{1}{t} \geqslant 0$

Par comparaison, on conclut à la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 2. *Soient f, g dans $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ avec $b \in\,]\,a\,;+\infty\,[\,\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration. C'est la contraposée du résultat précédent. □

Remarque : Les remarques mentionnées au corollaire précédent valent à l'identique.

Corollaire 3 (Critère des équivalents). *Soient f, g dans $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ avec $b \in\,]\,a\,;+\infty\,[\,\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$. On a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ de même nature.*

Démonstration. On a $f = \mathrm{O}(g)$. Par suite, si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On a l'autre implication par symétrie des rôles. □

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]\,a\,;b\,]$ avec $a \in\,]\,a\,;b\,[\,\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a.

Proposition 11. *Soient $f, g \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec a une extrémité de I hors de I. Si $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$ et si g positive au voisinage de a, alors f est positive au voisinage de a.*

Vocabulaire : Voisinage de a signifie ici un intervalle inclus dans I d'extrémité a.

Démonstration. On a $f = g\varphi$ avec $\varphi(t) \xrightarrow[t\to a]{} 1$. Ainsi, il existe $\mathrm{V} \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $g(t) \geqslant 0$ pour $t \in \mathrm{V}$. Le résultat suit. □

Exemple : $\sin\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\ln t}}{t} \geqslant 0$ pour $t > 1$. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right) \mathrm{d}t$ diverge.

Proposition 12. *Soient f, g, h dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ et $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). On suppose $f \leqslant g \leqslant h$ et les intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b h$ convergentes. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g$ converge.*

Démonstration. On a $0 \leqslant g - f \leqslant h - f$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (h - f)$ converge d'où la convergence de $\displaystyle\int_a^b (g - f)$ par comparaison. Par linéarité, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (g - f + f) = \int_a^b g$ converge. □

II Fonctions intégrables

1 Intégrabilité

Définition 5. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ avec $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ et $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). La fonction f est dite* intégrable *ou* d'intégrale absolument convergente *sur* I *si* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge. On dit aussi f intégrable en a et/ou b selon les cas d'ouvertures.*

Notation : L'ensemble des fonctions intégrables sur I est noté $\mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$. Pour f intégrable sur I, on note $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$ pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : Pour $f \geqslant 0$, l'intégrabilité de f sur I équivaut la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. La fonction $|f|$ est bien continue par morceaux comme composée de $z \mapsto |z|$ avec f, le module étant continue par inégalité triangulaire inverse.

Proposition 13. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ avec $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ et $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$ (éventuellement infinis). L'intégrabilité de f sur I équivaut à l'intégrabilité de f sur l'intérieur de I.*

Démonstration. Si l'intervalle I est ouvert, il n'y a rien à faire. Si a et/ou b est fermée, ouvrir la borne de l'intervalle y rend l'intégrale faussement impropre et ne change pas sa nature. □

Exemple : Soit $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ pour $t \in \mathrm{I} =]\,1\,;+\infty\,[$. La fonction f est intégrable sur I puisqu'on sait qu'elle est continue et intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ ouvrir la borne 1 y rend l'intégrale faussement impropre.

Proposition 14. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ avec $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ et $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$ finis. Si I est un segment ou si f est prolongeable par continuité en les bornes éventuellement ouvertes de I, alors f est intégrable sur I.*

Démonstration. Si l'intervalle I est un segment, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ est bien définie donc convergente. Sinon, on applique la proposition 4 à $|f|$. □

2 Propriétés fondamentales

Théorème 3. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a = \text{Inf I}$ et $b = \text{Sup I}$ (éventuellement infinis). Si f est intégrable sur* I*, alors $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$ est convergente.*

Démonstration. Supposons f à valeurs réelles. On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ et d'après la proposition 12, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$ converge.
Supposons f à valeurs complexes. On a

$$|\text{Re } f| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad |\text{Im } f| \leqslant |f|$$

puis on applique le cas précédent sur Re f et Im f. □

Exemple : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(te^{-t}\right)\, dt$.

Remarque : La réciproque du théorème est fausse (et délicate). Une fonction non intégrable mais dont l'intégrale converge est dite d'intégrale *semi-convergente*.

Théorème 4. *L'ensemble $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev donc en particulier :*

1. *si $\lambda \in \mathbb{K}, f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, alors $\lambda f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$;*
2. *si $(f, g) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathrm{K})^2$, alors $f + g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.*

Remarque : Si I est un segment, cet ensemble est égal à $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ puisque l'intégrabilité y est acquise.

Démonstration. 1. Preuve immédiate.
2. On a $|f + g| \leqslant |f| + |g|$ et le résultat suit d'après la prop 3 et par comparaison.
L'ensemble considéré contient la fonction nulle et est donc un sev de $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. □

Proposition 15. *L'application $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, f \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$ est une forme linéaire.*

Démonstration. Conséquence du théorème 3 et de la prop 3. □

Proposition 16 (Positivité, croissance).

1. *Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $f \geqslant 0$. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f \geqslant 0$.*
2. *Soient f, g dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $f \leqslant g$. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f \leqslant \int_{\mathrm{I}} g$.*

Démonstration. 1. Par positivité de l'intégrale sur un segment et passage à la limite.
2. On écrit $g = (g - f) + f$, on a $g - f$ et f intégrable d'où par linéarité puis positivité de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{I}} g = \underbrace{\int_{\mathrm{I}} (g - f)}_{\geqslant 0} + \int_{\mathrm{I}} f \geqslant \int_{\mathrm{I}} f$$

□

Proposition 17 (Relation de Chasles). *Soient* I, J *des intervalles de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ *est un intervalle et* $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ *est soit vide, soit réduit à un point,* $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I} \cup \mathrm{J}, \mathbb{K})$ *et* f *intégrable sur* I *et* J*. Alors, on a* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I} \cup \mathrm{J}, \mathbb{K})$ *et*

$$\int_{\mathrm{I} \cup \mathrm{J}} f = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{J}} f$$

Démonstration. Résulte soit de la prop 1, soit de la définition d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert avec éventuellement des prolongements par continuité en $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ (disjonctions de cas). □

Proposition 18 (Inégalité triangulaire). *Soit* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$*. On a*

$$\left| \int_{\mathrm{I}} f \right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f|$$

Démonstration. Supposons $\mathrm{I} = [\, a\, ; b\, [$ (preuve identique pour les autres cas). Soit $x \in [\, a\, ; b\, [$, on a par inégalité triangulaire sur $[\, a\, ; x\,]$:

$$\left| \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

Passant à a limite $x \to b$ (tout converge), on obtient l'inégalité attendue. □

Proposition 19. *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *positive, intégrable sur* I *et* J *intervalle avec* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$*. Alors* f *est intégrable sur* J *et* $0 \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f \leqslant \int_{\mathrm{I}} f$*.*

Démonstration. Conséquence de la relation de Chasles (disjonction de cas, fastidieux). □

Théorème 5 (Propriété de séparation). *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *avec* $f \geqslant 0$ *et* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$*. On a*

$$\int_{\mathrm{I}} f = 0 \iff f = 0$$

Démonstration. Soit $[\, \alpha\, ; \beta\,] \subset \mathrm{I}$. Notons $a = \mathrm{Inf}\ \mathrm{I}$ et $b = \mathrm{Sup}\ \mathrm{I}$. Par relation de Chasles, on a

$$0 = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b \geqslant \int_\alpha^\beta \geqslant 0$$

D'où, par séparation sur un segment f s'annule sur tout segment inclus dans I donc f s'annule sur I tout entier. □

Remarque : Pour invoquer la propriété de séparation, il est fondamental de mentionner *continue et positive.*

3 Théorèmes de comparaison

Théorème 6. *Soient* f, g *dans* $\mathscr{C}_{pm}([\, a\, ; b\, [, \mathbb{K})$ *avec* $b \in \,]\, a\, ; +\infty\, [\cup \{+\infty\}$*. Si* g *est intégrable sur* $[\, a\, ; b\, [$ *et si* $f(t) \underset{t \to b}{=} O(g(t))$ *ou* $o(g(t))$ *ou* $\underset{t \to b}{\sim} g(t)$*, alors* f *est intégrable sur* $[\, a\, ; b\, [$*.*

Démonstration. Conséquence du corollaire 1. □

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]\,a\,;b\,]$ avec $a \in\,]\,\text{-}\infty\,;b\,[\, \cup \{\text{-}\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a.

Applications : Comparaison à intégrale de Riemann
1. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;{+\infty}\,[\,,\mathbb{K})$ et si $f = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, alors f intégrable sur $[\,a\,;{+\infty}\,[$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;a\,]\,,\mathbb{K})$ et si $f = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, alors f intégrable sur $]\,0\,;a\,]$.

Exemples : 1. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
On a $\dfrac{\ln(t)}{t^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ d'où la convergence absolue de l'intégrale par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.
2. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.
On a $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ d'où la convergence absolue de l'intégrale. Par ailleurs, on a $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2$ puisque

$$\left|\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 2$$

4 Intégration des relations de comparaison

Dans cette section, la fonction g est supposé positive mais les résultats valent aussi pour g négative (en considérant $-g$).

Théorème 7. *Soit f, g continues par morceaux sur $[\,a\,;b\,[$ avec $b \in\,]\,a\,;{+\infty}\,[\, \cup \{{+\infty}\}$ avec f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g positive, intégrable sur $[\,a\,;b\,[$.*

1. *Si $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable et*
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
2. *Si $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable et*
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
3. *Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable et*
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. La fonction f est intégrable par comparaison. Supposons $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}(g(t))$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [\,a\,;b\,[$ tel que

$$\forall t \in [\, c\,; b\,[\qquad |f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$

Puis, comme $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison et inégalité triangulaire, il vient

$$\forall x \in [\, c\,; b\,[\qquad \left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où le résultat. La preuve avec $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}(g(t))$ est identique et le cas $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$ se déduit du premier avec $f(t) \underset{t\to b}{=} g(t) + \mathrm{o}(g(t))$. $\square$

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]\, a\,; b\,]$ avec $a \in \,]-\infty\,; b\,[\,\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a.

Exemples : 1. On a

$$\int_x^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

2. On a
$$\forall \alpha > 0 \qquad \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

puisque
$$\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{1+\alpha}}\right)$$

Théorème 8. *Soit f, g continues par morceaux sur $[\, a\,; b\,[$ avec $b \in \,]\, a\,; +\infty\,[\,\cup \{+\infty\}$ avec f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g positive, non intégrable sur $[\, a\,; b\,[$.*

1. *Si $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$, alors*
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
2. *Si $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$, alors*
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
3. *Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors*
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Comme g est positive et non intégrable, alors $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$. Supposons $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}(g(t))$. Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [\, a\,; b\,[$ tel que

$$\forall t \in [\, c\,; b\,[\qquad |f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$

Par suite, il vient

$$\forall x \in [\, c\,; b\,[\qquad \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c |f(t)|\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_c^x \varepsilon g(t)\,\mathrm{d}t}_{\leqslant \int_a^x \cdots}$$

Or $$\int_a^c |f(t)| \, \mathrm{d}t / \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'où, il existe $d \in [\, c\,;b\,[$ tel que pour $x \in [\, d\,;b\,[$

$$\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t$$

Le résultat suit. La preuve avec $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}(g(t))$ est identique et le cas $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$ se déduit du premier avec $f(t) \underset{t\to b}{=} g(t) + \mathrm{o}(g(t))$. □

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]\, a\,;b\,]$ avec $a \in \,]\, -\infty\,;b\,[\, \cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a.

Exemples : 1. On a

$$\int_1^x \mathrm{th}\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$$

et par suite $$\int_0^x \mathrm{th}\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{th}\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{th}\left(\frac{1}{t}\right) \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell > 0$. Alors

$$\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell x$$

III Transformations d'intégrales

1 Théorème de changement de variable

Théorème 9 (Théorème du changement de variable). *Soit $f \in \mathscr{C}^0(]\, a\,;b\,[, \mathbb{K})$ avec a et b éventuellement infinis et $\varphi :]\, \alpha\,;\beta\,[\to]\, a\,;b\,[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u)\varphi'(u) \, \mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.*

Démonstration. Soit $[\, \alpha'\,;\beta'\,] \subset \,]\, \alpha\,;\beta\,[$ et notons $a' = \varphi(\alpha')$ et $b' = \varphi(\beta')$. On a, par croissance de φ et bijectivité de $]\, \alpha\,;\beta\,[$ sur $]\, a\,;b\,[$,

$$\begin{cases} \alpha' \to \alpha \\ \beta' \to \beta \end{cases} \iff \begin{cases} a' \to a \\ b' \to b \end{cases}$$

avec par exemple $a' = \varphi(\alpha') \xrightarrow[\alpha'\to\alpha]{} a$ et $\alpha' = \varphi^{-1}(a') \xrightarrow[a'\to a]{} \alpha$. D'après le théorème de changement de variable (usuel) sur $[\, \alpha'\,;\beta'\,]$, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\alpha'}^{\beta'} f \circ \varphi(u)\varphi'(u) \, \mathrm{d}u$$

Par suite, l'intégrale de gauche admet une limite finie pour $a' \to a$, $b' \to b$ si et seulement si l'intégrale de droite admet une limite finie pour $\alpha' \to \alpha$, $\beta' \to \beta$, autrement dit les intégrales $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u)\varphi'(u) \, \mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, il suffit de passer à la limite pour avoir l'égalité souhaitée. □

Théorème 10 (Théorème du changement de variable). *Soit $f \in \mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,[\,,\mathbb{K})$ avec a et b éventuellement infinis et $\varphi :]\,\alpha\,;\beta\,[\to]\,a\,;b\,[$ bijective, strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $-\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.*

Démonstration. Soit $[\,\alpha'\,;\beta'\,] \subset]\,\alpha\,;\beta\,[$ et notons $b' = \varphi(\alpha')$ et $a' = \varphi(\beta')$. On a, par décroissance de φ et bijectivité de $]\,\alpha\,;\beta\,[$ sur $]\,a\,;b\,[$,

$$\begin{cases} \alpha' \to \alpha \\ \beta' \to \beta \end{cases} \iff \begin{cases} b' \to b \\ a' \to a \end{cases}$$

D'après le théorème de changement de variable (usuel) sur $[\,\alpha'\,;\beta'\,]$, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\beta'}^{\alpha'} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{\alpha'}^{\beta'} f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

La suite de la preuve est identique à la précédente. □

Remarques : 1. On peut appliquer ces théorèmes même si la fonction f est définie continue en une des bornes a ou b. En cette borne ouverte, l'intégrale y est simplement faussement impropre.
2. L'omission des hypothèses est tolérée dans le cas d'un changement de variables donné par une fonction affine ou puissance ou exponentielle ou logarithme.

Application : Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ avec $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$ finies. On a

$$f \text{ intégrable en } a \iff u \mapsto f(u+a) \text{ intégrable en } 0$$

et

$$f \text{ intégrable en } b \iff u \mapsto f(b-u) \text{ intégrable en } 0$$

Corollaire 4. *Soient a, b, α des réels et $a < b$.*

1. $$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

2. $$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

Démonstration. 1. On pose $f(t) = \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ pour $t \in [\,a\,;b\,[$. On a $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$. Comme la fonction f est positive, son intégrabilité en b équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et d'après l'application mentionnée précédemment, on a

$$f \text{ intégrable en } b \iff u \mapsto f(b-u) = \frac{1}{u^\alpha} \text{ intégrable en } 0 \iff \alpha < 1$$

2. Identique. □

Exemples : 1. Avec $u = t^2$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

2. Avec $u = \dfrac{1}{t}$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

Proposition 20. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(]-a\,;a\,[,\mathbb{K})$ avec $a \in\,]\,0\,;+\infty\,[\, \cup \{+\infty\}$. Si $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si f est paire ou impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et*

$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \textit{si } f \textit{ paire} \\ 0 & \textit{si } f \textit{ impaire} \end{cases}$$

Démonstration. Avec le changement de variables $u = -t$, les intégrales

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-a}^0 f(-u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Le résultat suit. □

2 Intégration par parties

Théorème 11 (Théorème d'intégration par parties). *Soient u et v dans $\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ avec I intervalle $a = \mathrm{Inf}\,\mathrm{I}$, $b = \mathrm{Sup}\,\mathrm{I}$ (éventuellement infinis). Si le produit uv admet des limites finies en a et b alors les intégrales $\int_{\mathrm{I}} uv'$ et $\int_{\mathrm{I}} u'v$ sont de même nature. En cas de convergence, on a*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Par intégration par parties sur $[\,a'\,;b'\,] \subset\,]\,a\,;b\,[$, on a

$$\int_{a'}^{b'} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{a'}^{b'} - \int_{a'}^{b'} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Si le produit uv admet des limites finies en a et b, alors $\int_{a'}^{b'} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $a' \to a$, $b' \to b$ si et seulement si $\int_{a'}^{b'} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $a' \to a$, $b' \to b$ autrement dit les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, l'égalité s'obtient par passage à la limite. □

Remarque : On apportera une attention particulière au choix d'une primitive lors d'une intégration par parties. En effet, selon la primitive utilisée, le crochet peut être fini ou pas.

Exemples : 1. L'intégrale de *Dirichlet*

• Convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et égalité avec $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Le crochet $\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty}$ est fini et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par trigonométrie, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin\left(t/2\right)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Enfin, avec le changement de variables $u = t/2$, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale de } \textit{Dirichlet} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

• Divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

On a $|\sin(t)| \geqslant \sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ pour tout t réel. Avec le changement de variable $u = 2t$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et donc convergentes en procédant à nouveau par intégration par parties. Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, alors par linéarité $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\frac{1-\cos(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{t}\right]\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge ce qui est absurde. On en déduit la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et par comparaison

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

2. Équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \to +\infty$. On a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$$

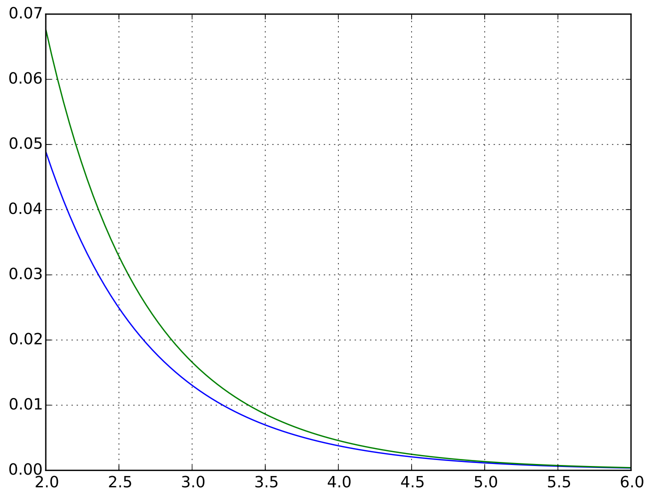

FIGURE 9 – Graphes de $y = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

IV Fonctions définies par une intégrale

1 Convergence dominée

Pour J intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\bar{\mathrm{J}}$ l'adhérence de J, c'est-à-dire l'intervalle J dont on ferme les bornes finies.

Théorème 12 (Théorème de convergence dominée). *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\ell \in \bar{\mathrm{J}}$ *ou* ℓ *extrémité infinie de* J. *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{J}}$ *une famille de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$ *vérifiant :*

1. *les* f_λ *sont continues par morceaux ;*
2. *On a* $f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to \ell]{} f$ *avec* f *continue par morceaux ;*
3. *Domination : il existe* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\forall \lambda \in \mathrm{J} \qquad |f_\lambda| \leqslant \varphi$$

Alors, les f_λ *et* f *sont intégrables sur* I *et*

$$\int_{\mathrm{I}} f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to \ell]{} \int_{\mathrm{I}} f$$

[Admis]

Exemple : On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Limite puis équivalent de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to +\infty$.

On a $$\forall x > 1 \qquad \forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \leqslant \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

On a φ continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par convergence dominée $$\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Puis $$\forall t \geqslant 0 \qquad x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

Par convergence dominée $$x\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Autrement dit $$\mathrm{F}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

2 Continuité sous l'intégrale

Dans ce qui suit, X désigne une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 13. *Soit* $f : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}, (x,t) \to f(x,t)$*. On suppose*

1. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad f(x,\cdot) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$
2. $\forall t \in \mathrm{I} \qquad f(\cdot,t) \in \mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbb{K})$
3. *Domination : Il existe* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ *telle que*
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est bien définie et continue sur* X.

[Admis]

Remarques : 1. Dans un premier temps, on considère que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point (on utilisera le cas de X partie non vide d'un evn ultérieurement).

2. L'hypothèse majeure de ce théorème est l'hypothèse de domination. La continuité est une propriété locale. Pour établir la continuité en $x_0 \in \mathrm{X}$, une domination sur voisinage de x_0 suffit. Dans le cas où X est un intervalle de $\mathbb{R}$ (cas le plus fréquent), si on ne parvient à établir une domination globale, à savoir sur X tout entier, on se contente d'une domination locale sur tout segment $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}$, ou $[\,-a\,;a\,] \subset \mathrm{X}$ $(a > 0)$ ou sur $[\,a\,;+\infty\,[\subset \mathrm{X}$, etc. ...

Exemples : 1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ (vue comme intégrale sur $]\,0\,;+\infty\,[$). L'exemple est très naïf puisque le calcul explicite est possible avec $\mathrm{F}(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\mathrm{F}(0) = 0$. Une domination globale ne fonctionne pas puisque $t \mapsto \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x \geqslant 0} x\mathrm{e}^{-xt} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}$ n'est pas intégrable. Pour $x \in [\,a\,;b\,[$ avec $0 < a \leqslant b$, on a
$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant x\mathrm{e}^{-xt} \leqslant b\mathrm{e}^{-at}$$
dominante qui est intégrable d'où la continuité de F sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et donc sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Pour $x \in\,]\,0\,;1\,[$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$. On a
$$\forall t \in\,]\,0\,;1\,] \qquad \operatorname*{Sup}_{x \in]\,0\,;1\,[} f(x,t) = \frac{1}{t(1+t)} \quad \text{et} \quad \forall t > 1 \qquad \operatorname*{Sup}_{x \in]\,0\,;1\,[} f(x,t) = \frac{1}{1+t}$$
Il faut donc rester à distance de 0 et de 1. On procède à une domination locale sur $[\,a\,;b\,] \subset\,]\,0\,;1\,[$ avec
$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \frac{1}{t^x(1+t)} \leqslant \frac{1}{t^b(1+t)} + \frac{1}{t^a(1+t)}$$
dominante qui est intégrable d'où la continuité de F sur $[\,a\,;b\,]$ pour tout $[\,a\,;b\,] \subset\,]\,0\,;1\,[$ et donc la continuité sur $]\,0\,;1\,[$.

3 Régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale

Dans ce qui suit, X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Théorème 14. *Soit* $f : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}, (x,t) \to f(x,t)$*. On suppose :*

1. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad f(x,\cdot) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
2. $\forall t \in \mathrm{I} \qquad f(\cdot,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{K})$
3. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$
4. *Domination : Il existe* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est bien définie de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* X *avec*

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

[Admis]

Vocabulaire : Ce théorème est aussi intitulé *théorème de dérivation sous l'intégrale* ou *théorème de Leibniz.*

Remarque : Comme pour la continuité, le caractère $\mathscr{C}^1$ est une propriété locale et on peut et même on doit se contenter d'une domination locale si on ne parvient pas à réaliser une domination globale.

Exemple : On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

On trouve $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad$ puis $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{Arctan}\, x$

4 Régularité $\mathscr{C}^k$ sous l'intégrale

Dans ce qui suit, X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Théorème 15. *Soit* $f : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}, (x,t) \to f(x,t)$ *et* k *entier non nul. On suppose :*

1. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad f(x,\cdot) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
2. $\forall t \in \mathrm{I} \qquad f(\cdot,t) \in \mathscr{C}^k(\mathrm{X},\mathbb{K})$
3. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad \forall j \in [\![1\,;\,k-1]\!] \qquad \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
4. $\forall x \in \mathrm{X} \qquad \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$;
5. *Domination : Il existe* $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est bien définie de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* X *avec*

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \forall j \in [\![1\,;\,k]\!] \qquad \mathrm{F}^{(j)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

[Admis]

Remarque : Comme pour la continuité, le caractère $\mathscr{C}^k$ est une propriété locale et on peut et même on doit se contenter d'une domination locale si on ne parvient pas à réaliser une domination globale.

Commentaire : La domination de la k-ième dérivée partielle garantit une domination locale pour chacune des dérivées partielles intermédiaires. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}$. On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) + \int_a^x \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(u,t)\,\mathrm{d}u$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t)\right| + (b-a)\varphi(t)$$

On obtient donc localement une dominante pour $\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$ et il suffit de procéder par récurrence pour obtenir des dominantes pour chaque dérivée partielle intermédiaire.

Un exemple incontournable : La fonction Γ d'Euler

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que Γ est bien définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Établir $\qquad \forall x > 0 \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

   En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout n entier.
3. Monter que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

4. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$

Soit $x > 0$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ et

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{avec} \quad 1-x<1 \quad \text{et} \quad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par suite, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a $-t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $-t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Comme le crochet $[-t^x\mathrm{e}^{-t}]$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même natures donc convergentes et on a

$$\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-t^x\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

En particulier, pour n entier non nul, on a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ et une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n!$.

3. On montre que Γ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec n entier non nul.

• D'après le résultat de la première question, pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable.

• Pour $t > 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^n(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \,]\,0\,;+\infty\,[^2 \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$$

• Pour $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$ et $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et pour $\alpha \in \,]\,0\,;x\,[$, on a

$$\ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi $\boxed{\forall k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!] \qquad \forall x > 0 \qquad t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ intégrable sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : Soit $[\,a\,;b\,] \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) = |\ln(t)|^n \,(t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}$$

Soit $\alpha \in \,]\,0\,;a\,[$. On a

$$t^{1-\alpha}\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|\, t^{a-\alpha} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \iff \varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t\to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

par croissances comparées. Ainsi, la fonction φ est intégrable. Par conséquent, la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur tout segment inclus dans $]\,0\,;+\infty\,[$ donc sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et ce pour tout n entier donc

$$\boxed{\Gamma \in \mathscr{C}^\infty(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

4. Pour $x > 0$, on a $f(x,\cdot)$ continue sur I, positive non nulle d'où $\Gamma(x) > 0$ par séparation de l'intégrale. On en déduit que $\ln \circ \Gamma$ est deux fois dérivable comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall x > 0 \qquad (\ln \circ \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

puis
$$\forall x > 0 \qquad \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$$

Soit $[\,a\,;b\,] \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz classique (dans $\mathrm{F} = \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$ muni de $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{F}^2$), on a

$$\left(\int_a^b \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \ln(t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Faisant tendre $a \to 0$, $b \to +\infty$, toutes les intégrales concernées étant convergentes, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{\Gamma'}{\Gamma} \text{ croît .}}$$

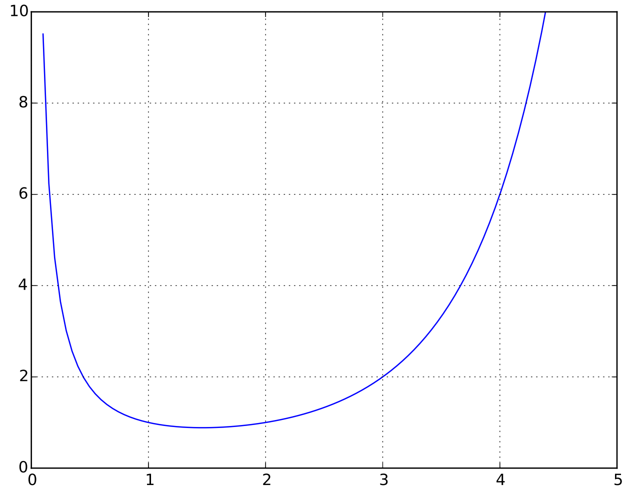

FIGURE 10 – Tracé de la fonction Γ

Remarque : On peut établir la stricte croissance mais dans ce cas, il faut nier le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace E des fonctions continues de carré intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

L'ensemble E est bien stable par combinaison linéaire en utilisant l'inégalité

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad (f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2)$$

et l'intégrale définissant le produit scalaire converge car

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad |fg| \leqslant \frac{f^2+g^2}{2}$$

On conclut comme précédemment en considérant

$$f : t \in \mathrm{I} \mapsto \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad g : t \in \mathrm{I} \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

avec $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. La famille (f,g) étant libre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et g est stricte.