

**EXERCICES DE PRÉ-RENTRÉE**

TD

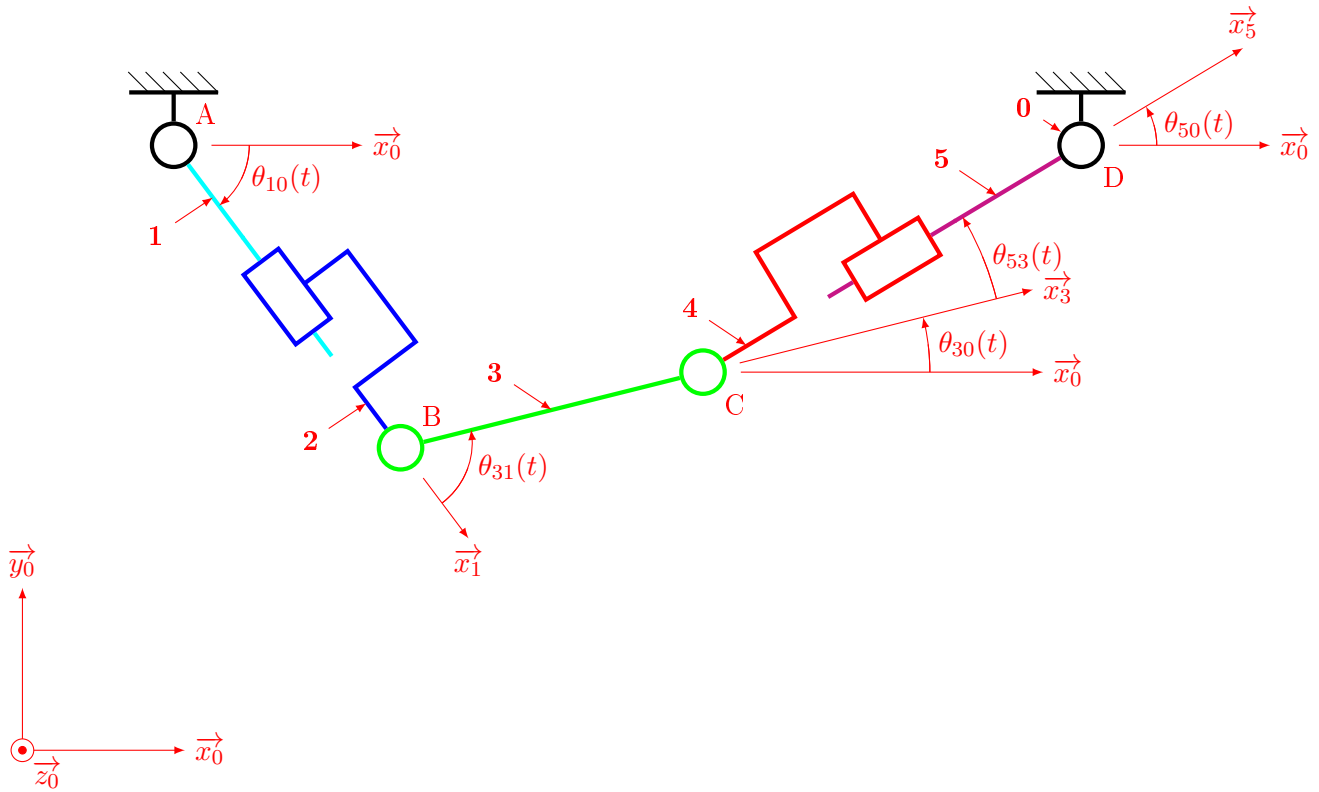
v1.1

*Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony***Table des matières**

1	Robot à câbles RC-4 - <i>par Denis Defauchy</i>	2
2	Manipulations de schémas blocs	6
3	Performances d'un système asservi	8
4	Pilote automatique de voilier	11
5	Robot de maraîchage	12
6	Réglage du gain de l'interface Homme-Machine - <i>par COURTOIS Gilles</i>	15
7	Robot Spirit - <i>adapté de X-ENS PSI 2005</i>	17
8	Un problème de l'Égypte antique	30
9	Dispositif Médical d'injection	32

1 Robot à câbles RC-4 - par Denis Defauchy

Question 1 Refaire le schéma cinématique en utilisant une couleur différente par pièce.



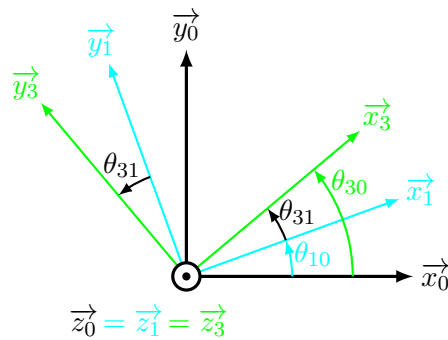
Les cercles représentant les liaisons pivot peuvent être de la couleur de l'autre pièce.

Question 2 Nommez complètement, avec ses éléments géométriques, la liaison entre 1 et 0 et la liaison entre 2 et 1. Vous préciserez également pour ces deux liaisons les mouvements relatifs possibles.

La liaison entre 1 et 0 est un pivot d'axe (A, \vec{z}_0) , le seul mouvement relatif possible est une rotation d'axe (A, \vec{z}_0) .

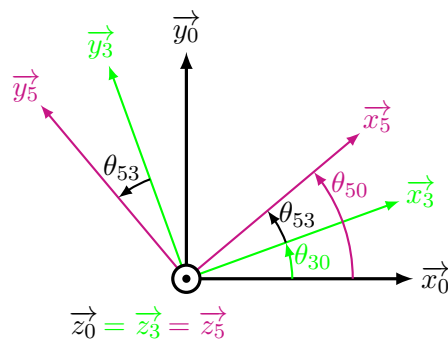
La liaison entre 2 et 1 est une glissière de direction \vec{x}_1 , le seul mouvement relatif possible est une translation de direction \vec{x}_1 .

Question 3 Réaliser une figure de calculs représentant les angles $\theta_{10}(t)$, $\theta_{31}(t)$ et $\theta_{30}(t)$. En déduire une relation entre ces angles.



donc $\theta_{30}(t) = \theta_{31}(t) + \theta_{10}(t)$

Question 4 Réaliser une figure de calculs représentant les angles $\theta_{50}(t)$, $\theta_{53}(t)$ et $\theta_{30}(t)$. En déduire une relation entre ces angles.



donc $\theta_{50}(t) = \theta_{53}(t) + \theta_{30}(t)$

Question 5 Écrire la fermeture angulaire et en déduire une relation entre θ_{10} , θ_{31} , θ_{53} et θ_{50} .

fermeture angulaire : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_5) + (\vec{x}_5, \vec{x}_0) = 0$ donc $\theta_{10} + \theta_{31} + \theta_{53} - \theta_{50} = 0$

Question 6 Écrire la fermeture géométrique du système et en déduire les deux équations scalaires associées par projection dans la base b_0 reliant $\lambda_1(t)$, a , $\lambda_5(t)$, L , θ_{10} , θ_{30} et θ_{50} .

fermeture géométrique : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

$\lambda_1(t) \cdot \vec{x}_1 + a \cdot \vec{x}_3 + \lambda_5(t) \cdot \vec{x}_5 - L \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$ (eq1)

On projette (eq1) sur \vec{x}_0 : $\lambda_1(t) \cdot \cos \theta_{10} + a \cdot \cos \theta_{30} + \lambda_5(t) \cdot \cos \theta_{50} - L = 0$

On projette (eq1) sur \vec{y}_0 : $\lambda_1(t) \cdot \sin \theta_{10} + a \cdot \sin \theta_{30} + \lambda_5(t) \cdot \sin \theta_{50} = 0$

Afin de positionner simplement le Mobile **3** par rapport à la plaque **0** on ajoute ce paramétrage :
 $\vec{AB} = x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0$

Question 7 Exprimer $\vec{AB} = \lambda_1(t) \cdot \vec{x}_1$ dans la base b_0 , sachant que $\vec{AB} = x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 = \lambda_1(t) \cdot \vec{x}_1$ en déduire deux relations entre $x(t)$, $y(t)$, $\lambda_1(t)$ et θ_{10} .

$\vec{AB} = \lambda_1(t) \cdot \vec{x}_1 = \lambda_1(t) \cdot \cos \theta_{10} \cdot \vec{x}_0 + \lambda_1(t) \cdot \sin \theta_{10} \cdot \vec{y}_0$ donc : $x(t) = \lambda_1(t) \cdot \cos \theta_{10}$ et $y(t) = \lambda_1(t) \cdot \sin \theta_{10}$

Le code python qui permet de résoudre et de tracer la figure :

```

1  ## Résolution
2  # Les bibilothèques nécessaires
3  from scipy.optimize import fsolve # La fonction pour résoudre le système non linéaire
4  from math import cos, sin
5
6  # Définition des constantes (estimée à partir de photos du robot RC-4)
7  L = 700 # en mm
8  H = 800 # en mm
9  a = 140 # en mm
10
11 # La position désirée pour le Mobile
12 x = (L-a)/2 # en mm
13 y = -H/2 # en mm
14 T30 = 0 # en radian
15
16 # Définition des équations
17 def Equations(p):
18     T10, T50, T31, T53, lambda1, lambda5 = p
19     eq1 = T10 + T31 + T53 - T50
20     eq2 = lambda1*cos(T10) + a*cos(T30) + lambda5*cos(T50) - L
21     eq3 = lambda1*sin(T10) + a*sin(T30) + lambda5*sin(T50)
22     eq4 = x - lambda1*cos(T10)
23     eq5 = y - lambda1*sin(T10)
24     eq6 = T31 + T10 - T30
25     return eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6
26
27 # Résolution
28 Init = 0,0,0,0,0,0
29 Sol = fsolve(Equations,Init)
30 # fsolve détermine une solution par itérations successives.
31 # fsolve a besoin de deux arguments :
32 # Equations : une fonction qui renvoie les valeurs des équations à résoudre
33 # Init : un tuple qui contient les valeurs initiales à utiliser pour les inconnues
34 # fsolve modifie les valeurs de Init pour faire en sorte que la fonction Equations renvoie (0)*
    nombre d'inconnues
35
36 T10, T50, T31, T53, lambda1, lambda5 = Sol # On affecte les solutions à nos variables (T pour th
    êta)
37
38 def Affiche_Sol():
39     """
40     Affiche la solution au système
41     """
42     print("T10 :",T10)
43     print("T50 :",T50)
44     print("T31 :",T31)
45     print("T53 :",T53)
46     print("lambda1 :",lambda1)
47     print("lambda5 :",lambda5)
48     print()
49
50 Affiche_Sol() # affiche la solution dans le Shells
51
52 # Vérification
53 Verif = Equations(Sol)
54 print('Vérification de la solution:')
55 print(Verif) # si tout s'est bien passé, on affiche un tuple avec des valeurs très proches de 0
56
57 ## Affichage de la solution
58 # Liste des points

```

```

59 def Creer_Points():
60     """
61     Calcule les coordonnées de spoints A, B, C et D à partir de la solution trouvée.
62     """
63     A = [0,0]
64     B = [lambda1*cos(T10), lambda1*sin(T10)]
65     C = [B[0]+a*cos(T30), B[1]+a*sin(T30)]
66     D = [L, 0]
67     LP = [A,B,C,D]
68     return LP # renvoie une liste de listes contenant les coordonnées
69
70 LP = Creer_Points() # On utilise la fonction
71
72 # Affichage
73 from matplotlib import pyplot as plt # la bibliothèque pour faire des tracés.
74 plt.close('all') # On ferme toutes les fenêtres graphiques
75
76 def Affiche(fig,LP):
77     plt.figure(fig) # On crée une fenêtre graphique avec le nom contenu dans fig
78     # Affichage des points
79     points = ['A', 'B', 'C', 'D']
80     i = 0 ; deport = 10
81     for P in LP:
82         X,Y = P
83         plt.text(X+deport, Y+deport, points[i], fontsize = 'x-large')
84         i += 1
85     # Traits des pièces
86     e = 2 # Epaisseur des traits des pièces
87     couleurs = ['b', 'lawngreen', 'r']
88     for i in range(len(LP)-1):
89         Xi,Yi = LP[i] # les coordonnées du premier point
90         Xj,Yj = LP[i+1] # les coordonnées du second point
91         plt.plot([Xi,Xj],[Yi,Yj],linewidth = e, color = couleurs[i]) # On trace le segment du
92         premier au second point
93     plt.axis('scaled') # force l'utilisation d'une même échelle sur les axes.
94     axes = plt.gca() # Pour accéder aux options sur les axes
95     marge = 60
96     axes.set_xlim(0-marge, L+marge) # donne les limites du graphe sur l'axe des x.
97     axes.set_ylim(-H-marge, 0+marge) # donne les limites du graphe sur l'axe des y.
98     plt.grid() # affiche une grille, j'aime bien, ça aide la lecture
99     plt.title(f'x={x}, y={y} et 'r'$\theta_{30}$'+f'={T30}') # On donne un titre
100     plt.text(100, -850, fr'$\lambda_1$={lambda1.round(1)}mm et $\lambda_5$={lambda5.round(1)}mm'
101     ) # On écrit dans la zone graphique
102     plt.show()
103 Affiche(1,LP)

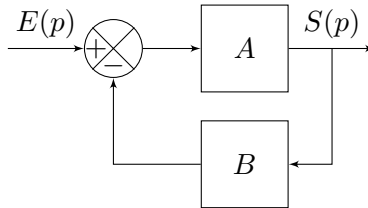
```

2 Manipulations de schémas blocs

— Attention —

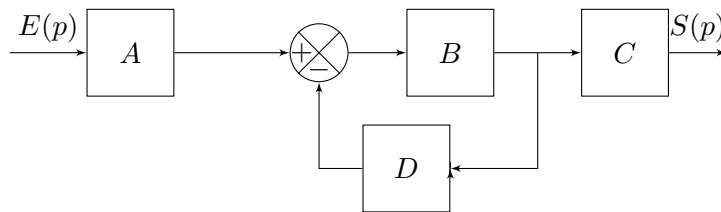
Pour obtenir l'intégralité des points attribués à chaque question, les fonctions de transferts demandées ne doivent comporter qu'une seule barre de fraction.

Question 1 Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ du schéma blocs ci-dessous.



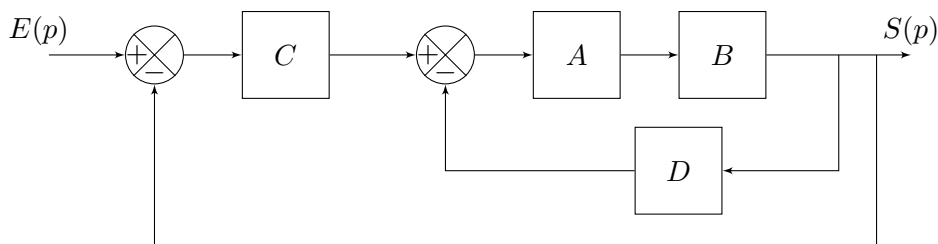
$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A}{1 + A.B}$$

Question 2 Déterminer la fonction de transfert $H_2(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ du schéma blocs ci-dessous.

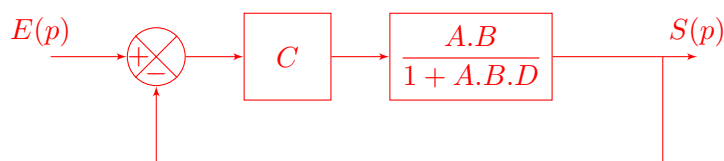


$$H_2(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = A \cdot \frac{B}{1 + B.D} \cdot D \text{ donc } H_2(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A.B.C}{1 + B.D}$$

Question 3 Déterminer la fonction de transfert $H_3(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ du schéma blocs ci-dessous.



On applique la formule de Black sur la boucle au centre, le schéma-blocs devient :



On applique une seconde fois la formule de Black : $H_3(p) = \frac{C \cdot \frac{A.B}{A.B.D}}{1 + C \cdot \frac{A.B}{A.B.D}}$

finalement
$$H_3(p) = \frac{A.B.C}{1 + A.B.D + A.B.C}$$

3 Performances d'un système asservi

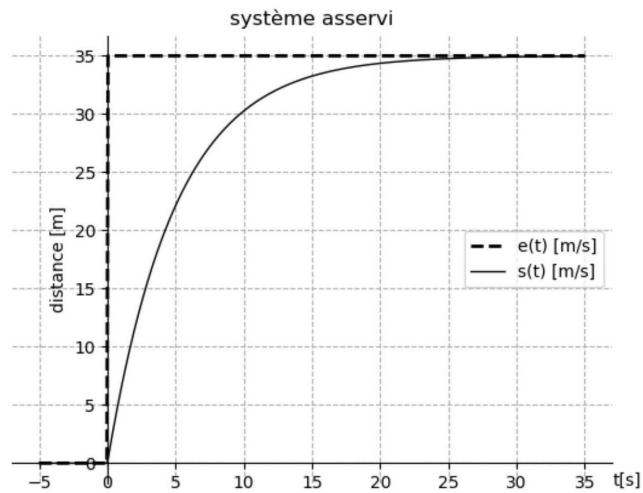
3.0.1 Asservissement de position

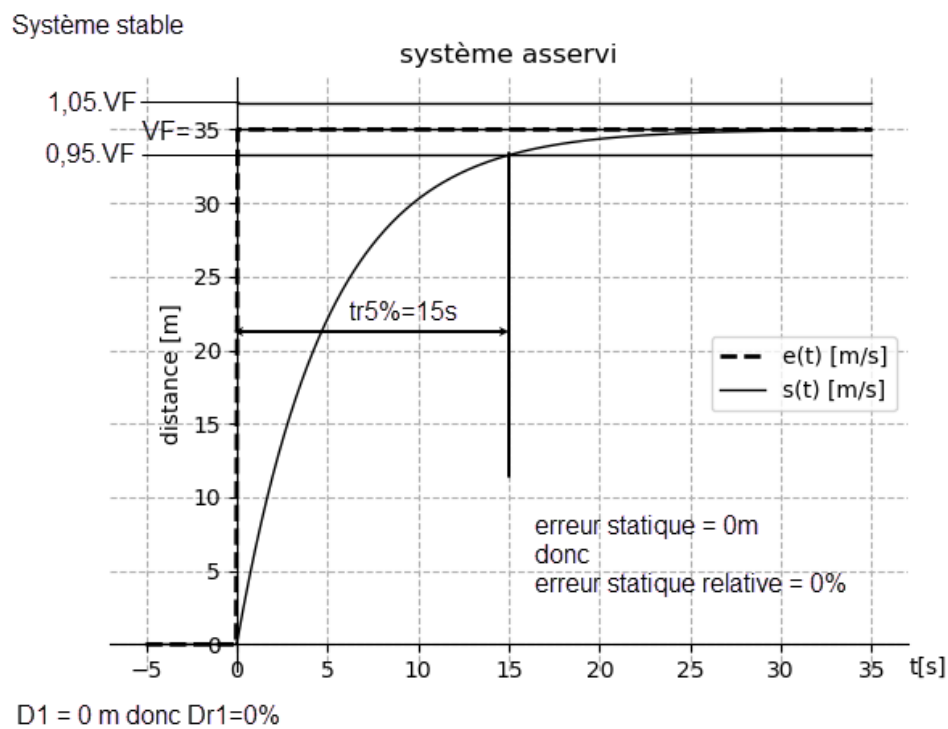
Le cahier des charges d'un asservissement en position est proposé ci-dessous.

Critères	Niveaux
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 5%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 20 s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 10%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.

Question 1 Le système satisfait-il au cahier des charges proposé ?





L'ensemble des critères du cahier des charges sont respectés.

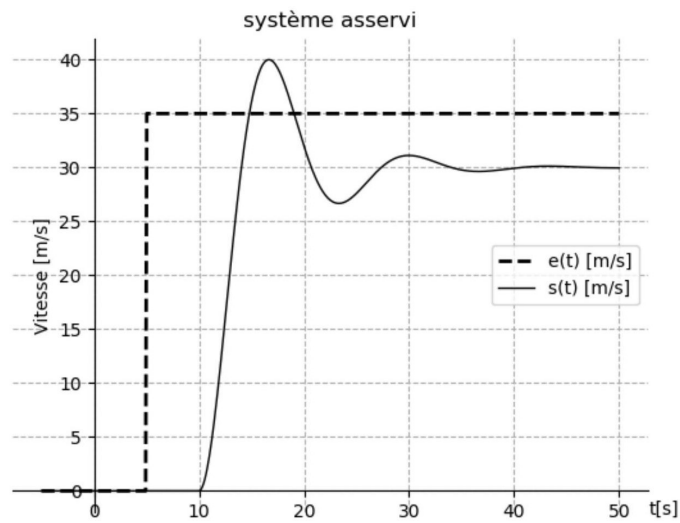
3.0.2 Asservissement de vitesse

Le cahier des charges d'un asservissement en vitesse est proposé ci-dessous.

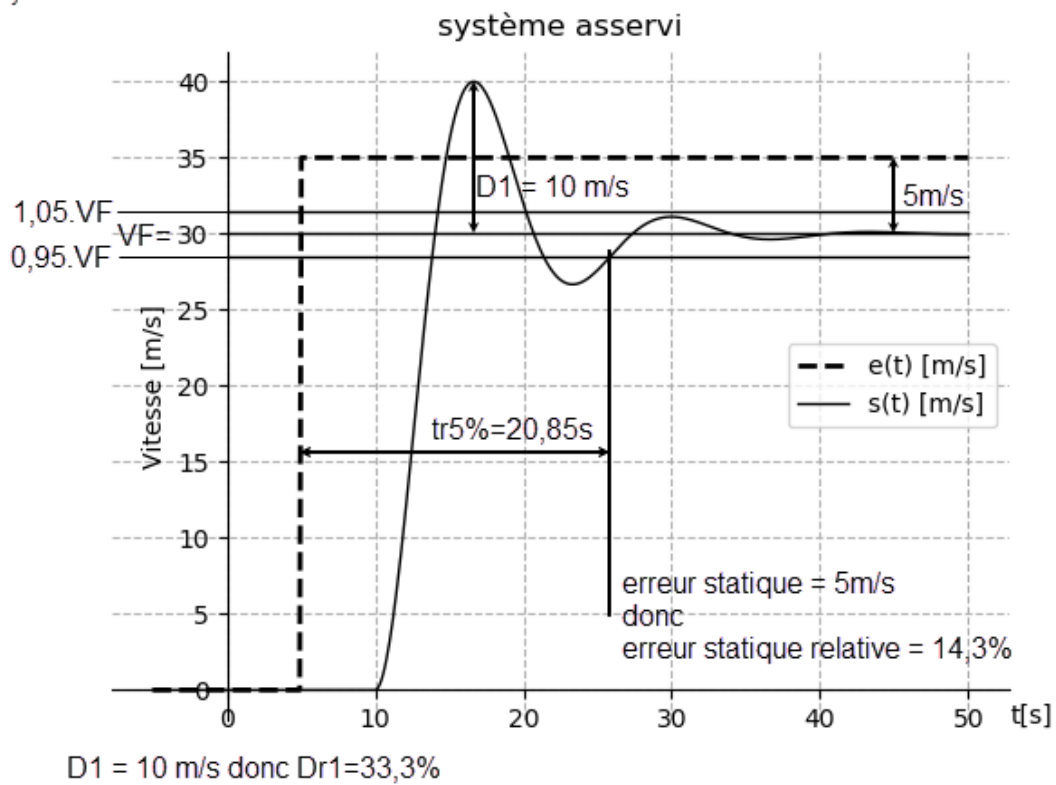
Critères	Niveaux
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 5%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 25 s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 10%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.

Question 2 Le système satisfait-il au cahier des charges proposé ?



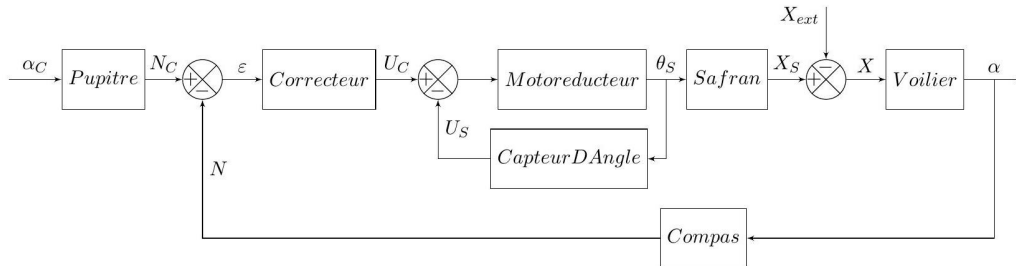
Système stable



Les critères du dépassement et de la précision ne sont pas respecté. Le système ne satisfait pas au cahier des charges.

4 Pilote automatique de voilier

Un pilote automatique de voilier est un dispositif chargé de barrer un voilier automatiquement, permettant au skipper de s'occuper des réglages des voiles ou de se reposer. Le système régule le cap du voilier à la valeur de consigne définie par le pilote. Le schéma-blocs fonctionnel est décrit sur la figure ci-dessous.

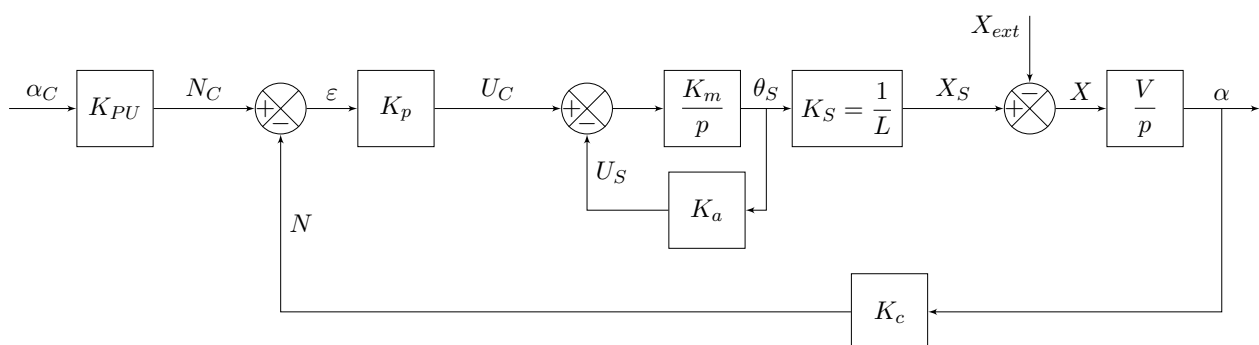


- Le skipper entre le cap consigne dans le pupitre de gain K_{PU} qui traduit l'information sous forme d'une variable N_c transmise au calculateur ;
- Le correcteur $C(p)$ élabore la commande U_c du groupe motorisation qui entraîne le safran d'un angle θ_s . Le correcteur est, en première approximation, choisi comme une constante $C(p) = K_p$;
- La fonction de transfert du groupe motorisation vaut $H_m(p) = \frac{K_m}{p}$
- La rotation du safran génère une action X_s entraînant le voilier en rotation. Le gain du safran vaut $K_s = \frac{1}{L}$ où L est une distance caractéristique du voilier ;
- Diverses perturbations (vagues, vent, etc.) exercent d'autres actions X_{ext} perturbant le mouvement du voilier ;
- Le comportement du voilier est modélisé par la fonction de transfert $H_b(p) = \frac{V}{p}$ où V est la vitesse du voilier ;
- Le compas de gain K_c mesure le cap réel du voilier et transmet l'information au calculateur sous forme d'une variable N ;
- Un second capteur de gain K_a est implanté sur le système, permettant de tenir compte de l'angle du safran dans la commande du système.

Question 1 Quelle valeur doit prendre le gain K_{PU} pour que l'écart ε soit nul lorsque la valeur consigne est atteinte : $\alpha = \alpha_C$? Cette valeur est admise pour la suite.

Il faut que $K_{PU} = K_C$

Question 2 Compléter le schéma-blocs ci-dessous du système asservi.



5 Robot de maraîchage

5.1 Présentation du système

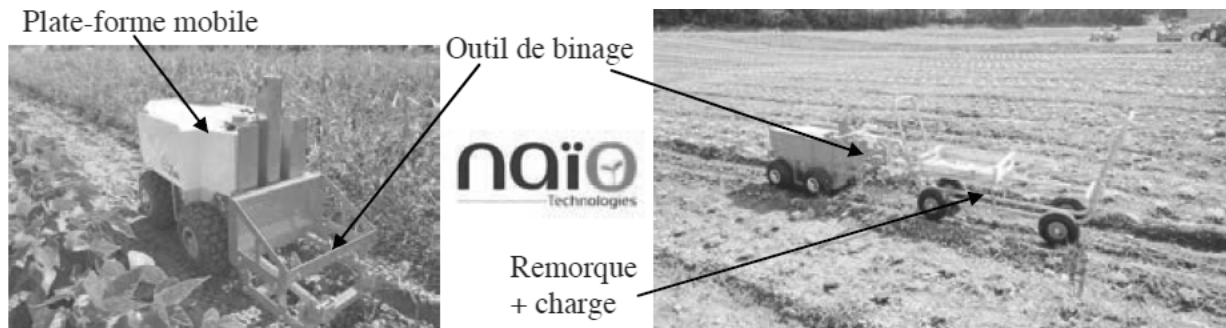


FIGURE 1 – Mise en situation du robot

Le robot de maraîchage *Oz 440* développé par la société *Naïo Technologies* est un outil autonome agricole, alliant robustesse et écologie, capable d'assister les maraîchers dans les tâches les plus pénibles comme le transport de charges lors des récoltes et le désherbage mécanique à l'aide d'un outil de binage.

Ce robot est constitué d'une plate-forme mobile électrique à 4 roues motrices sur laquelle sont fixés divers outils et capteurs. La FIGURE 2 donne la structure du robot sous la forme d'un diagramme de définition de blocs (BDD) avec les propriétés principales de chaque constituant, utiles pour la résolution du problème.

Ce robot de petite taille évolue directement entre les rangées de cultures pour un travail de précision. Il peut, par exemple, désherber et aussi suivre des personnes lors de la récolte tout en transportant des charges. Bien plus petit qu'un tracteur classique, il ne casse pas la structure naturelle du sol et évite ainsi le phénomène de compaction des sols provoqué habituellement par les tracteurs ou le piétinement de l'homme. Il roule lentement et passe au plus près des cultures sans risquer de les abîmer. Selon le vieil adage « un binage vaut deux arrosages », le fait de pouvoir utiliser ce robot régulièrement, sans perte de temps, permet de toujours avoir un sol parfaitement biné et ainsi de diminuer les effets d'évaporation de l'eau.

5.2 Travail demandé

Question 1 Identifier quelques éléments du milieu extérieur en interaction avec le robot de maraîchage.

Éléments du milieu extérieur en interaction avec le robot de maraîchage :

- Énergie ;
- Sol ;
- Maraîcher ;
- Outils
- Cultures, plantations ;
- Conditions extérieures. Ces informations peuvent être rassemblées sur un diagramme de contexte :

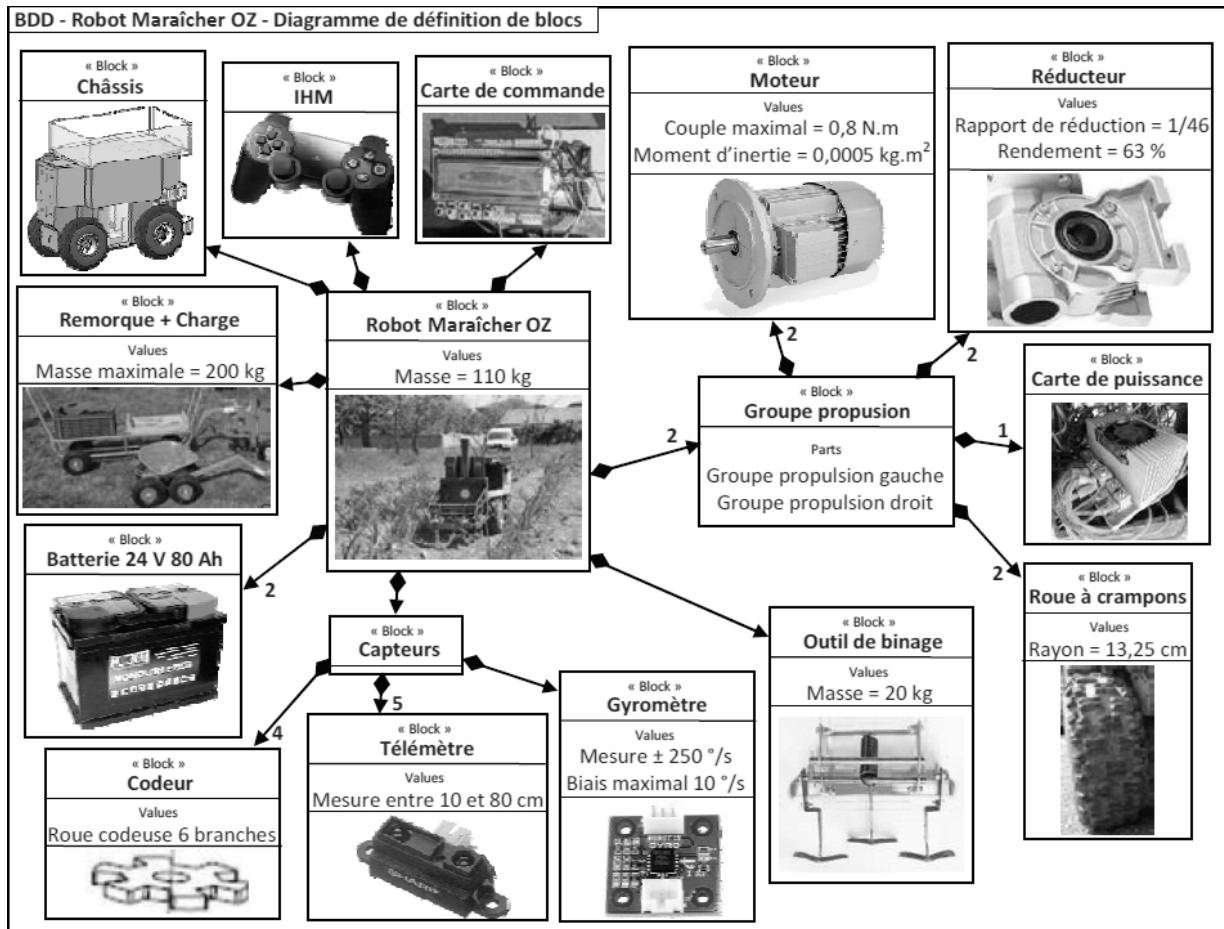
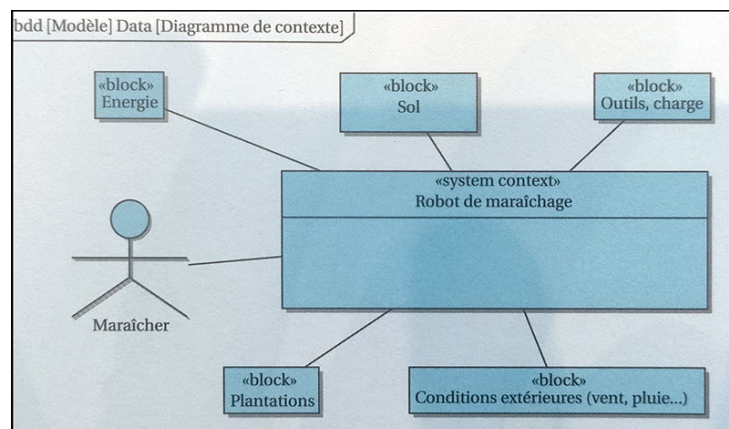


FIGURE 2 – Diagramme de définitions de blocs

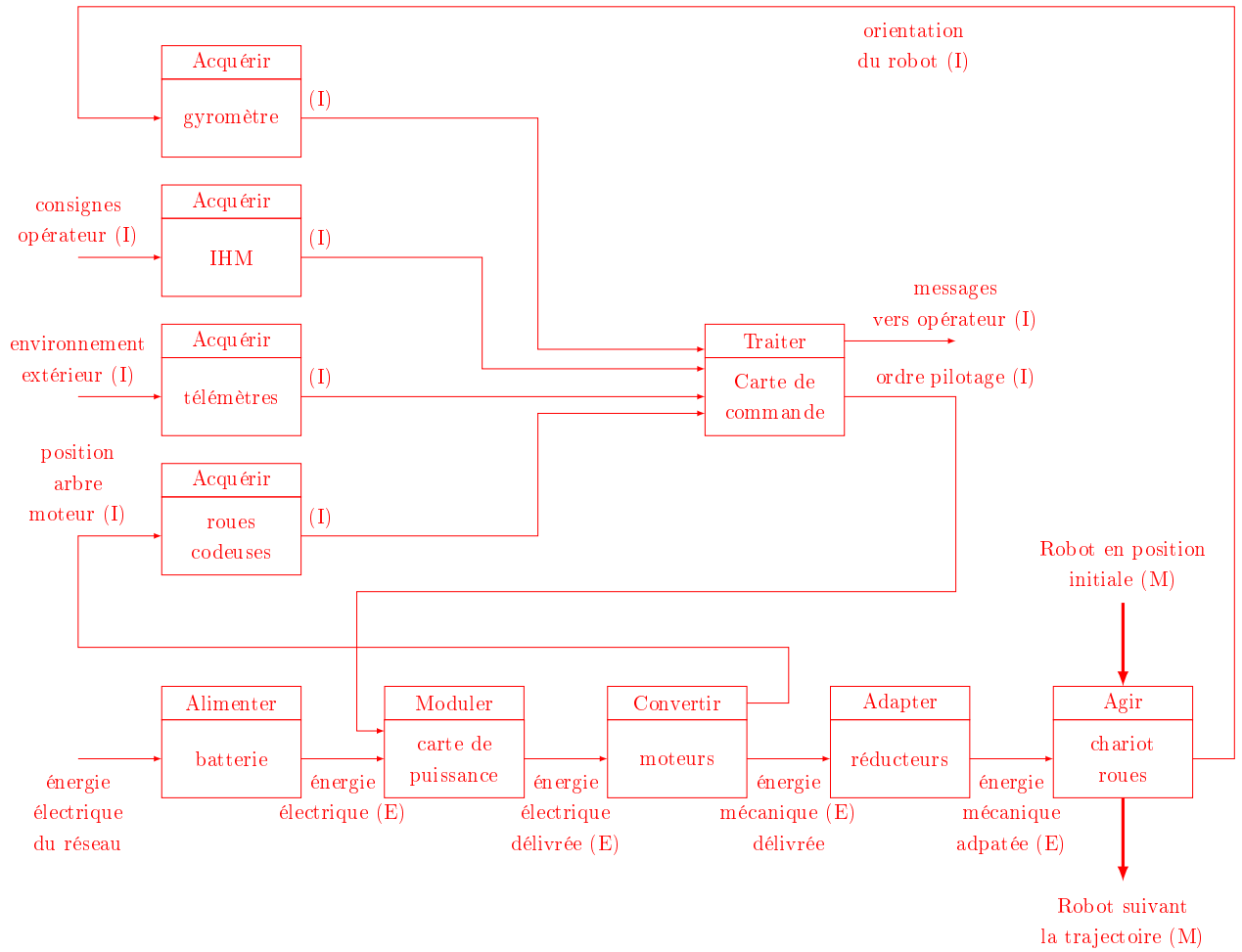


Question 2 justifier que le système possède bien quatre roues.

Sur le diagramme BDD, il apparaît deux groupes de propulsion (multiplicité indiquée sur le lien). Chaque groupe propulsion possède deux roues à crampons. Au total, le robot possède donc quatre roues.

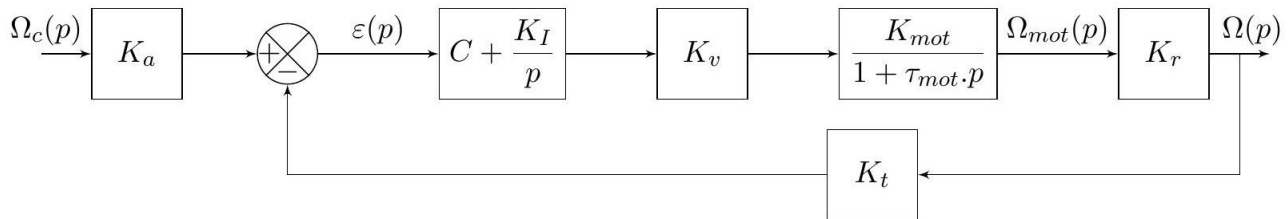
Question 3 Compléter les chaînes d'information (CI) et d'énergie (CE) du robot. Vous complétez les fonctions et noms des composants, indiquez le parcours des flux (lien CE-CI) et renseignez la

nature de ceux-ci (M pour matière, E pour énergie et I pour information).



6 Réglage du gain de l'interface Homme-Machine - *par COURTOIS Gilles*

Le schéma-blocs ci-dessous représente l'asservissement en vitesse d'un bras de robot. La consigne de vitesse angulaire est notée $\omega_c(t)$ ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$). Elle est adaptée à l'aide d'un adaptateur de gain K_a . La vitesse de rotation du bras du robot est noté $\omega(t)$ ($\text{rad}_s\text{s}^{-1}$). Elle est mesurée par une génératrice tachymétrique ¹ de gain K_t qui mesure la vitesse angulaire réelle.



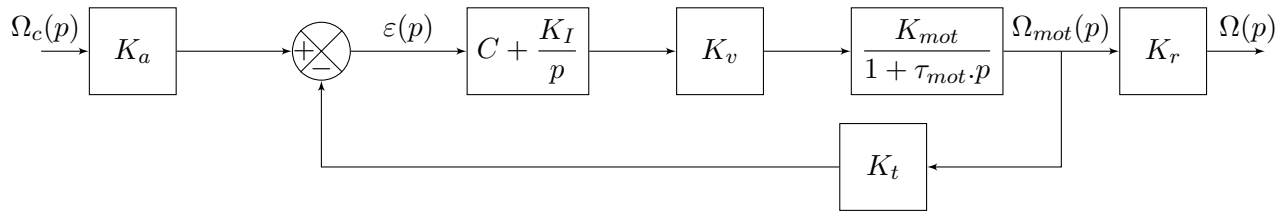
Question 1 (QI) Pour avoir un fonctionnement correct du système asservi, quelle valeur faut il imposer pour K_a ?

Si le système est précis, il faut qu'en régime permanent l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul.

Si la consigne vaut ω_{c0} et que le système est précis alors en régime permanent $\omega(t) = \omega_{c0}$.

Dans ces conditions $\varepsilon(t) = 0 = K_a \cdot \omega_{c0} - K_t \cdot \omega_{c0}$ Donc il faut imposer $K_a = K_t$

Une nouvelle architecture est proposée sur le schéma-blocs ci-dessous. La génératrice tachymétrique mesure maintenant la vitesse de rotation du moteur $\omega_{mot}(t)$ (rad.s⁻¹).



Question 2 (QI) Pour avoir un fonctionnement correct du système asservi, quelle **nouvelle valeur** faut-il imposer pour K_a ?

Si le système est précis, il faut toujours qu'en régime permanent l'écart $\varepsilon(t)$ soit nul.

Si la consigne vaut ω_{c0} et que le système est précis alors en régime permanent $\omega(t) = \omega_{c0}$.

Dans ces conditions $\omega_{mot}(t) = \frac{\omega_{c0}}{K_r}$

Alors $\varepsilon(t) = 0 = K_a \cdot \omega_{c0} - \frac{K_t}{K_r} \cdot \omega_{c0}$ Donc il faut imposer $K_a = \frac{K_t}{K_r}$

7 Robot Spirit - *adapté de X-ENS PSI 2005*

7.1 Présentation

Le robot *Spirit* a été conçu par la *NASA* pour étudier la composition chimique de la surface de la planète Mars. Pour satisfaire ce cas d'utilisation, le robot doit respecter plusieurs exigences grâce en partie aux solutions techniques listées ci-dessous :



FIGURE 3 – Représentation d'artiste du robot *Spirit* et prise de vue de la cible depuis la caméra panoramique implantée sur la tête périscopique.

- un **corps**, appelé « Warm Electronic Box », dont la fonction est d'assurer la liaison entre les divers composants. Il supporte les batteries qui sont chargées par des capteurs solaires. Il protège également l'électronique embarquée des agressions extérieures.
- une **tête périscopique** orientable dont la fonction est d'orienter le système appelé *Pancam* (Panoramic Camera) qui se trouve à 1,4 m de hauteur. Ce dernier fournit une vue en 3 dimensions de l'environnement. Le traitement des images acquises par les caméras du système *Pancam* permet à *Spirit* de réaliser une cartographie des terrains et donc de trouver de manière autonome son chemin en évitant les obstacles. Cette autonomie de déplacement est renforcée par l'utilisation de quatre caméras de direction situées sur le corps.
- un **bras articulé** dont la fonction est d'amener quatre outils (une foreuse, un microscope et deux spectromètres) à proximité d'une roche à étudier. L'étude de la roche par ces quatre outils se fait par des carottages horizontaux.
- **six roues, animées chacune par un motoréducteur**, dont la fonction est d'assurer le déplacement de *Spirit* sur un sol caillouteux. Les deux roues avant et arrière possèdent de plus un moteur permettant au robot de pivoter sur lui-même (jusqu'à un demi tour).
- un **système de communication et des antennes hautes et basses fréquences**, dont la fonction est de permettre à *Spirit* de communiquer avec la terre.

La fonction principale (équivalente au cas d'utilisation principal) est réalisée, d'un point de vue temporel, par les 3 phases décrites ci-dessous :

- la phase d'approche : *Spirit* « repère » une roche dont la forme est adaptée à l'étude chimique. Son rôle consiste à s'en rapprocher suffisamment près pour pouvoir l'étudier.
- la phase de déploiement : le corps de *Spirit* est fixe, le bras articulé se déploie et amène l'ensemble des 4 outils à proximité de la roche.
- la phase de prospection : le corps de *Spirit* ainsi que le bras articulé sont fixes, les 4 outils étudient la composition chimique de la roche.

Dans le cadre de ce sujet, nous allons nous étudier des éléments des phases d'approche et de déploiement.

7.2 Phase d'approche

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la solution constructive utilisée pour satisfaire l'exigence considérée respecte les niveaux attendus (voir FIGURE 4).

Exigence	Critère	Niveau
S'approcher de la cible	Erreur sur la position cible (intensité du vent = 10 N)	$x_s(t) - x_c(t) < 0,01$ m
	Dépassement sur la réponse indiciale	aucun
	Rapidité	$tr_{5\%} < 5$ s

FIGURE 4 – Extrait du recueil des exigences

L'asservissement du déplacement est indispensable du fait de l'existence de perturbations mal connues, qui sont principalement engendrées par les rafales de vent sur la surface de Mars. La position asservie du robot est notée $x_s(t)$.

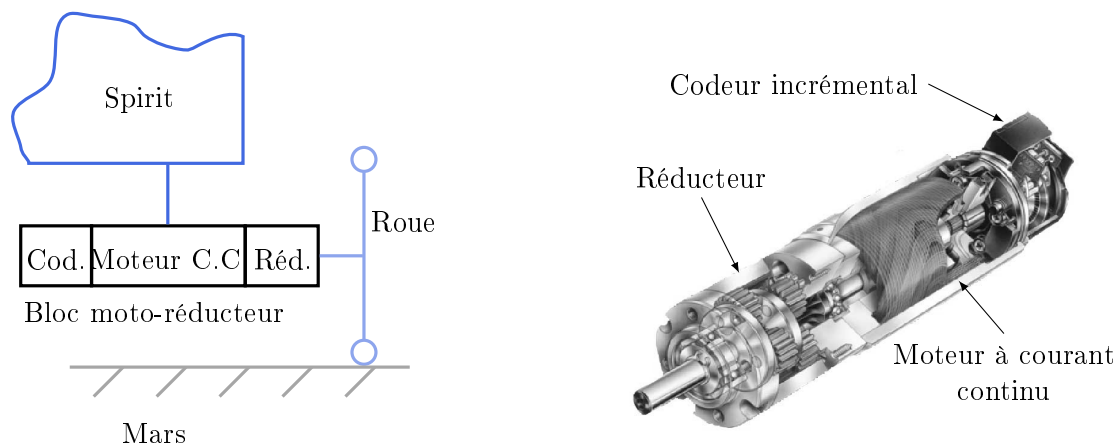


FIGURE 5 – Schéma de la motorisation du robot et vue en écorché du moto-réducteur et de son codeur incrémental (capteur qui mesure la position angulaire du moteur).

Pour effectuer cette approche, la motorisation est assurée par un bloc motoréducteur à courant continu dans chacune des six roues (cf. FIGURE 5). Le mouvement ainsi généré est observé de manière optique. En effet, les caméras situées sur la tête périscopique Pancam (cf. FIGURE 3) permettent à tout instant de connaître la position absolue de *Spirit*. Le traitement de cette information par l'électronique embarquée fournit donc une mesure de l'erreur par rapport à la position cible.

7.3 Architecture du système asservi – Modèle de connaissance

Objectif

L'objectif de cette partie est de construire le modèle par schéma-bloc dans le formalisme de Laplace.

Une étude dynamique du robot *Spirit* en déplacement par rapport au sol, sous l'action mécanique des moteurs et de la perturbation due au vent donne les équations suivantes (programme de 2^e année) :

$$M_s \cdot \frac{d^2 x_s(t)}{dt^2} = 6 \cdot F_{R-S}(t) + F_{V-S}(t) \quad (1)$$

$$M_r \cdot \frac{d^2 x_s(t)}{dt^2} = -F_{R-S}(t) + F_{M-R}(t) \quad (2)$$

$$\frac{I_r}{R_r} \cdot \frac{d^2 x_s(t)}{dt^2} = C_{S-R}(t) - R_r \cdot F_{M-R}(t) \quad (3)$$

On définit les constantes suivantes :

- $M_s = 180 \text{ kg}$: masse de *Spirit* sans les roues,
- M_r : masse d'une roue,
- I_r : inertie de rotation d'une roue et de son moteur autour de son axe de révolution,
- $R_r = 0,05 \text{ m}$: rayon d'une roue,
- $\eta = 19$: rapport de réduction du réducteur à engrenages

On définit les variables suivantes :

- $x_s(t)$: position de *Spirit* sur Mars,
- $C_{S-R}(t)$: couple moteur appliqué sur la roue,
- $F_{R-S}(t)$: effort d'une roue sur *Spirit*,
- $F_{M-R}(t)$: effort de liaison,
- $F_{V-S}(t)$: effort dû au vent dans la direction \vec{x}_s , modélisant la perturbation sur *Spirit*.

L'étude de la motorisation, dans le cas d'un moteur à courant continu, donne les équations « classiques » suivantes :

$$u(t) = e(t) + R_m \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{C_{S-R}(t)}{\eta} = K_t \cdot i(t) \quad (5)$$

$$e(t) = K_e \cdot \frac{\eta}{R_r} \cdot \frac{dx_s(t)}{dt} \quad (6)$$

On définit les constantes suivantes :

- $R_m = 2,9 \Omega$: résistance aux bornes de l'induit,
- L : inductance aux bornes de l'induit,
- $K_t = 0,07 \text{ N.m.A}^{-1}$: constante de couple,
- $K_e = 0,07 \text{ V.s}$: constante de force contre électromotrice.

On définit les variables suivantes :

- $u(t)$: tension d'alimentation du moteur,
- $e(t)$: force contre électromotrice,
- $i(t)$: intensité traversant le moteur.

Question 1 (QI) On se place dans les conditions de Heaviside, écrire la transformée de Laplace des équations de la dynamique, notées de (1) à (3).

Dans les conditions de Heaviside (CI nulles) :

$$M_s \cdot p^2 \cdot X_s(p) = 6 \cdot F_{R-S}(p) + F_{V-S}(p)$$

$$M_r \cdot p^2 \cdot X_s(p) = -F_{R-S}(p) + F_{M-R}(p)$$

$$\frac{I_r}{R_r} \cdot p^2 \cdot X_s(p) = C_{S-R}(p) - R_r \cdot F_{M-R}(p)$$

Question 2 À partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, compléter le schéma bloc.

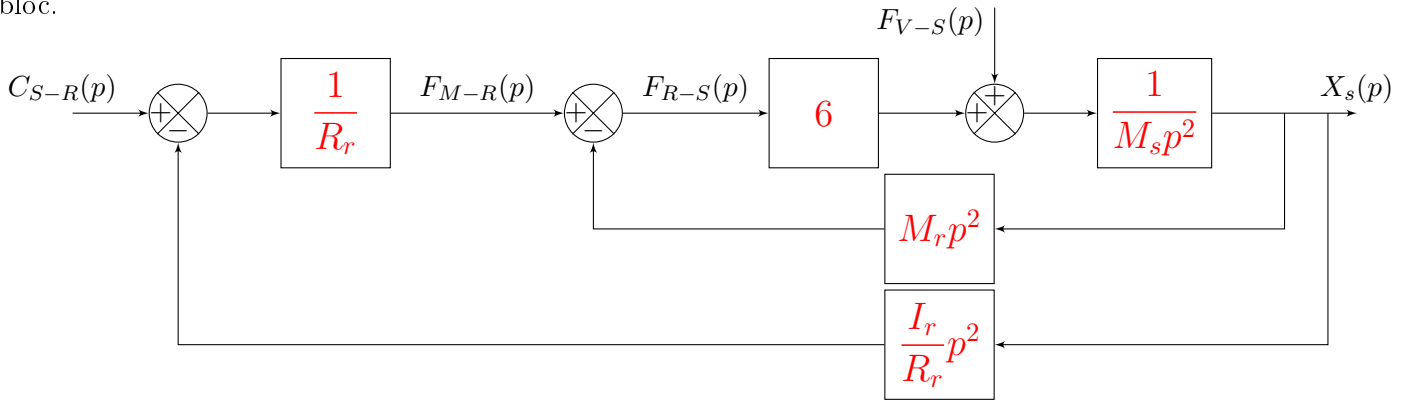


FIGURE 6 – Schéma-blocs de la partie mécanique (corrigé)

$$F_{M-R}(p) = \frac{1}{R_r} \left[C_{S-R}(p) - \frac{I_r}{R_r} \cdot p^2 \cdot X_s(p) \right]$$

$$X_s(p) = \frac{1}{M_s \cdot p^2} [6 \cdot F_{R-S}(p) + F_{V-S}(p)]$$

$$F_{R-S}(p) = F_{M-R}(p) - M_r \cdot p^2 \cdot X_s(p)$$

Question 3 Montrer que le schéma bloc précédent peut être mis sous la forme de celui de la FIGURE 7. Vous préciserez les expressions de α , $\beta(p)$ et $\gamma(p)$.

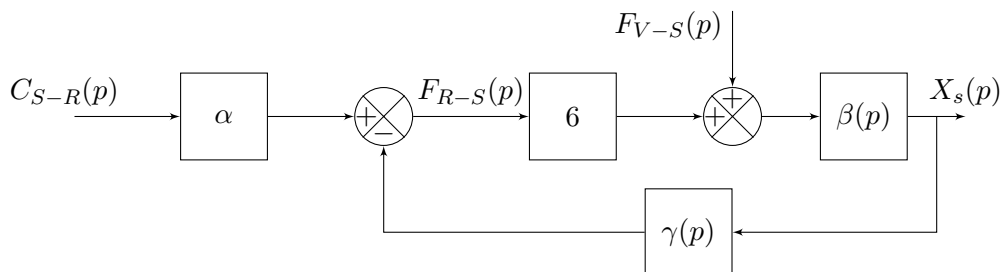
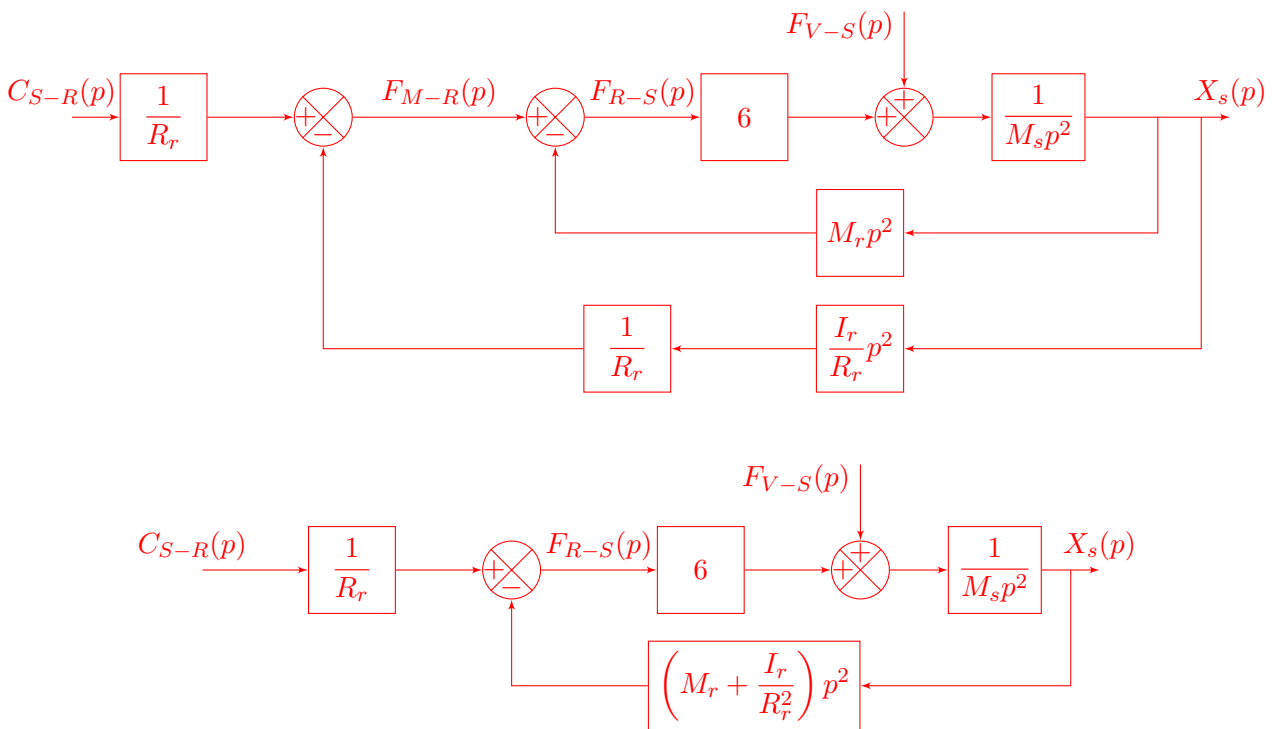


FIGURE 7 – Schéma-blocs transformé

Il faut fusionner les deux boucles de retour. Pour cela il faut que les deux comparateurs soient voisins. On déplace donc le bloc contenant $\frac{1}{R_r}$.



Question 4 (QI) Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le moteur à courant continu, notées (4) à (6), et compléter le schéma bloc.

$$U(p) = E(p) + R_m I(p) + LpI(p) \quad \frac{C_{S-R}(p)}{\eta} = K_t I(p) \quad E(p) = K_e \cdot \frac{\eta}{R_r} \cdot p \cdot X_s(p)$$

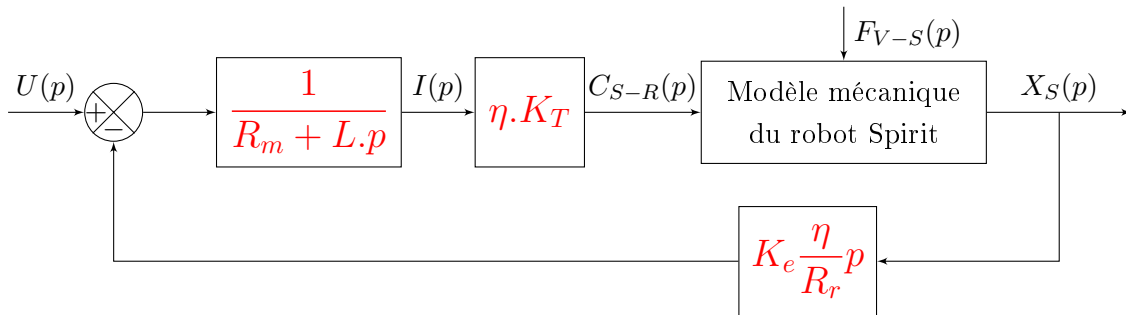


FIGURE 8 – Schéma-blocs du système (corrigé)

Question 5 Le schéma-blocs représente-t-il un système asservi ? Justifier la réponse.

Non, car la grandeur de sortie n'est pas la même que la grandeur d'entrée... Et surtout le bloc dans la branche de retour ne représente pas un capteur. On ne pourra parler « que » de système bouclé.

7.4 Vérification des performances (partie indépendante)

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier les performances du système.

Le moteur utilisé dispose d'une inductance très faible ce qui permet par la suite de simplifier le modèle. On va donc considérer $L = 0$.

Le schéma-blocs complété de la FIGURE ?? peut se mettre sous la forme de celui de la FIGURE 9 avec

- $A = a$ avec $a = \frac{6 \cdot \eta \cdot K_t}{R_m \cdot R_r} = 55,1 \text{ N} \cdot \text{V}^{-1}$;
- $B = \frac{1}{b \cdot p^2}$ avec $b = M_s = 180 \text{ kg}$;
- $D = d \cdot p^2 + c \cdot p$ avec $d = \frac{I_r \cdot R_m + M_r \cdot R_r^2 \cdot R_m}{\eta \cdot R_r \cdot K_t} = 1,18 \text{ V} \cdot \text{s}^2$ et $c = \frac{\eta \cdot K_e}{R_r} = 26,6 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

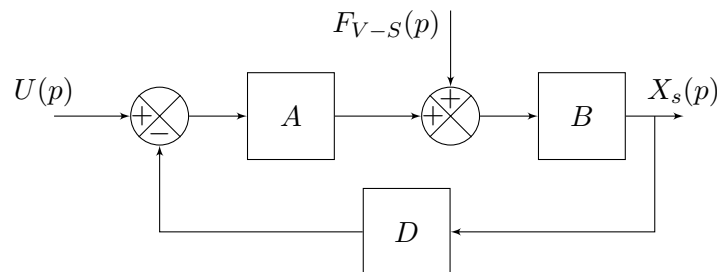


FIGURE 9 – Schéma-blocs réduit

Remarque

Pour la suite du problème, on admettra ce résultat.

Pour contrôler le robot correctement, un asservissement de position est réalisé selon le principe de la FIGURE 10

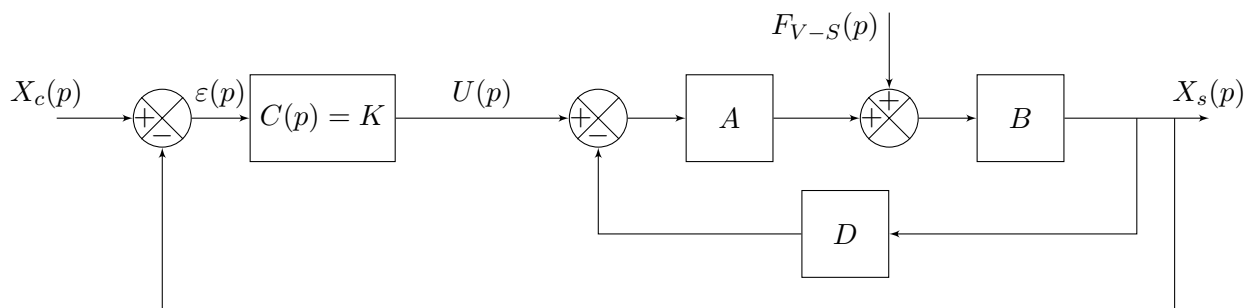
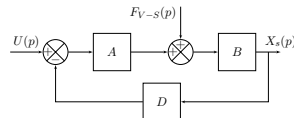


FIGURE 10 – Asservissement en position

Question 6 (QI) En utilisant le vocabulaire dédié aux systèmes asservis, nommer les éléments :

- $X_c(p)$ est **la consigne** ;
- $\varepsilon(t)$ est **l'écart** ;



- le sous schéma-blocs est **le processus** ;
- $U(p)$ est **le paramètre de commande** ;
- $F_{V-S}(p)$ est **la perturbation** ;
- $X_S(p)$ est **la réponse (ou grandeur asservie)** ;
- $C(p)$ est **le correcteur**. Il permet d'élaborer **le paramètre de commande** à partir de **l'écart** ;

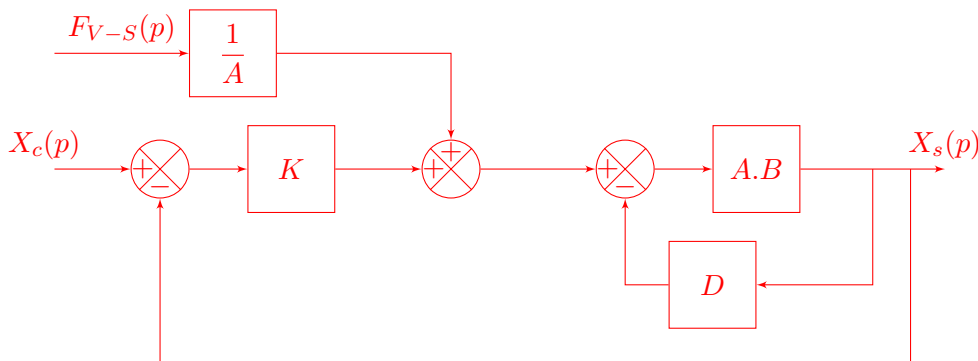
Objectif

On cherche à déterminer la sortie $X_s(p)$ en fonction des entrées $X_c(p)$ et $F_{V-S}(p)$.

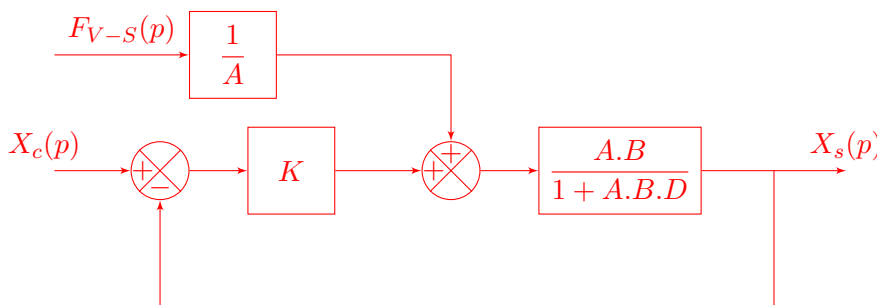
Question 7 (QI) Montrer que $X_s(p) = G_1(p).X_c(p) + G_2(p).F_{V-S}(p)$ où vous exprimerez $G_1(p)$ et $G_2(p)$ en fonction de A, B, D et K .

On repère deux boucles concentriques. La perturbation $F_{V-S}(p)$ doit être sortie de ces deux boucles. On peut travailler par transformations successives :

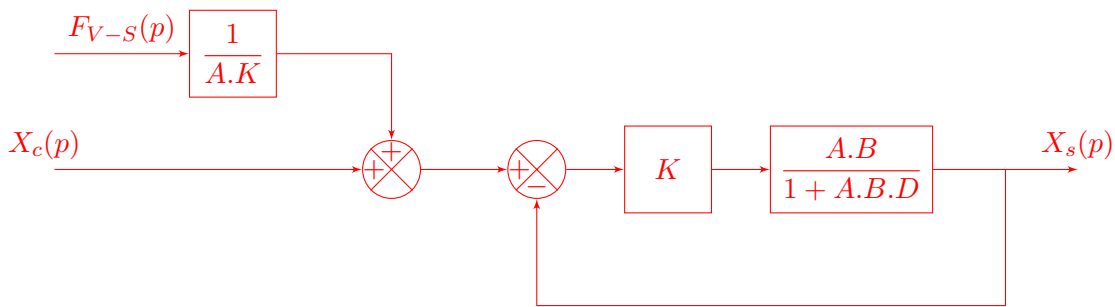
On sort $F_{V-S}(p)$ de la boucle centrale :



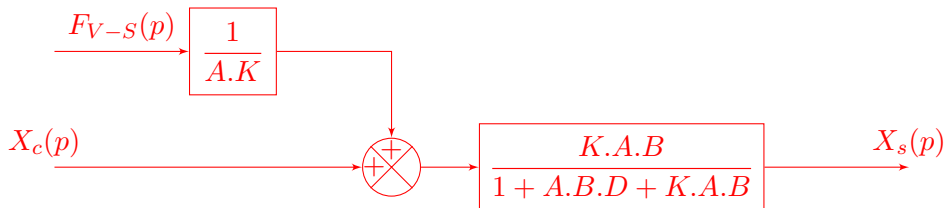
On applique Black sur la boucle intérieure :



Puis on sort $F_{V-S}(p)$ de la boucle extérieure :



On applique Black une seconde fois :



Finalement on obtient :

$$X_s(p) = \underbrace{\frac{ABK}{1+ABK+ABD}}_{G_1(p)} X_c(p) + \underbrace{\frac{B}{1+ABK+ABD}}_{G_2(p)} F_{V-s}(p)$$

Question 8 En remplaçant A , B et D par leur expression (en fonction de a , b , c , d), montrer que l'on peut écrire $G_1(p)$ et $G_2(p)$ sous la forme :

$$G_1(p) = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad \text{et} \quad G_2(p) = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

En travaillant par identification, donner l'expression des constantes caractéristiques K_1 , K_2 , ξ et ω_0 en fonction de a , b , c , d et K .

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{c}{K}p + \frac{b+ad}{aK}p^2}$$

soit

$$K_1 = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{aK}{b+ad}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{ac^2}{4K(b+ad)}}$$

$$G_2(p) = \frac{\frac{1}{aK}}{1 + \frac{c}{K}p + \frac{b+ad}{aK}p^2}$$

soit

$$K_2 = \frac{1}{aK}$$

Une étude, non effectuée aujourd'hui, a permis de déterminer la valeur numérique de K . Afin de valider cette valeur un essai a été réalisé sur le robot *Spirit*. Cet essai a été réalisé en l'absence de vent. Le relevé obtenu est fourni sur la FIGURE 11.

Question 9 (QI) Vérifier le cahier des charges (FIGURE 4) et conclure. Les tracés nécessaires à la lecture des valeurs apparaîtront.

- Aucun dépassement \Rightarrow OK
- Rapidité : $tr_{5\%} = 4\text{s} < 5\text{s} \Rightarrow$ OK

En l'absence de vent le cahier des charges est respecté.

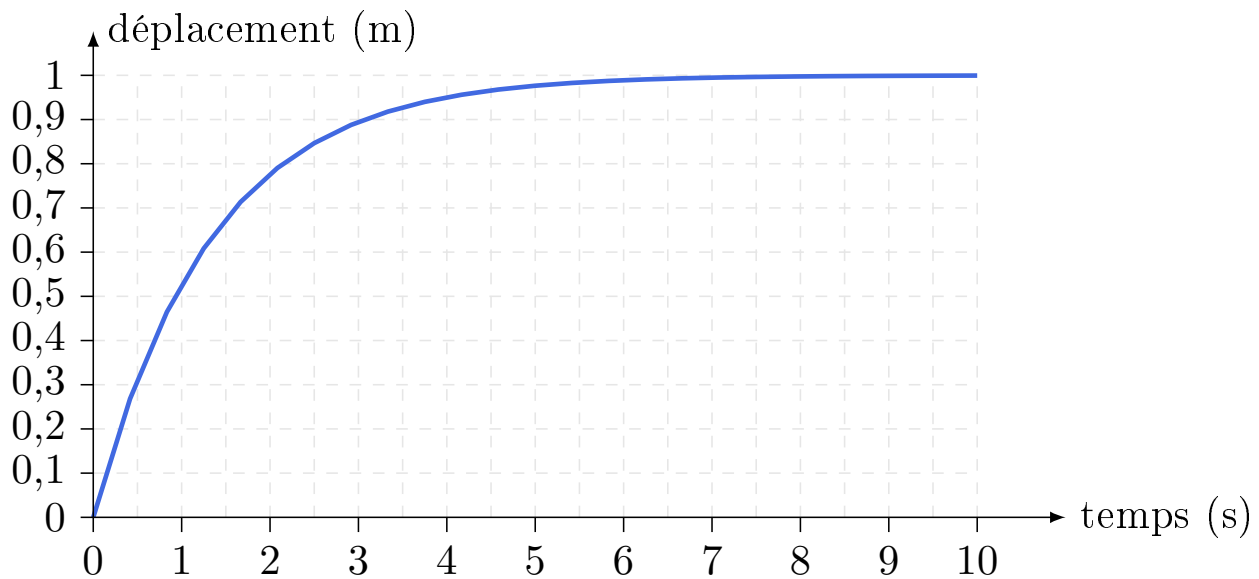


FIGURE 11 – Allure de la réponse pour une entrée en échelon d'amplitude 1 m

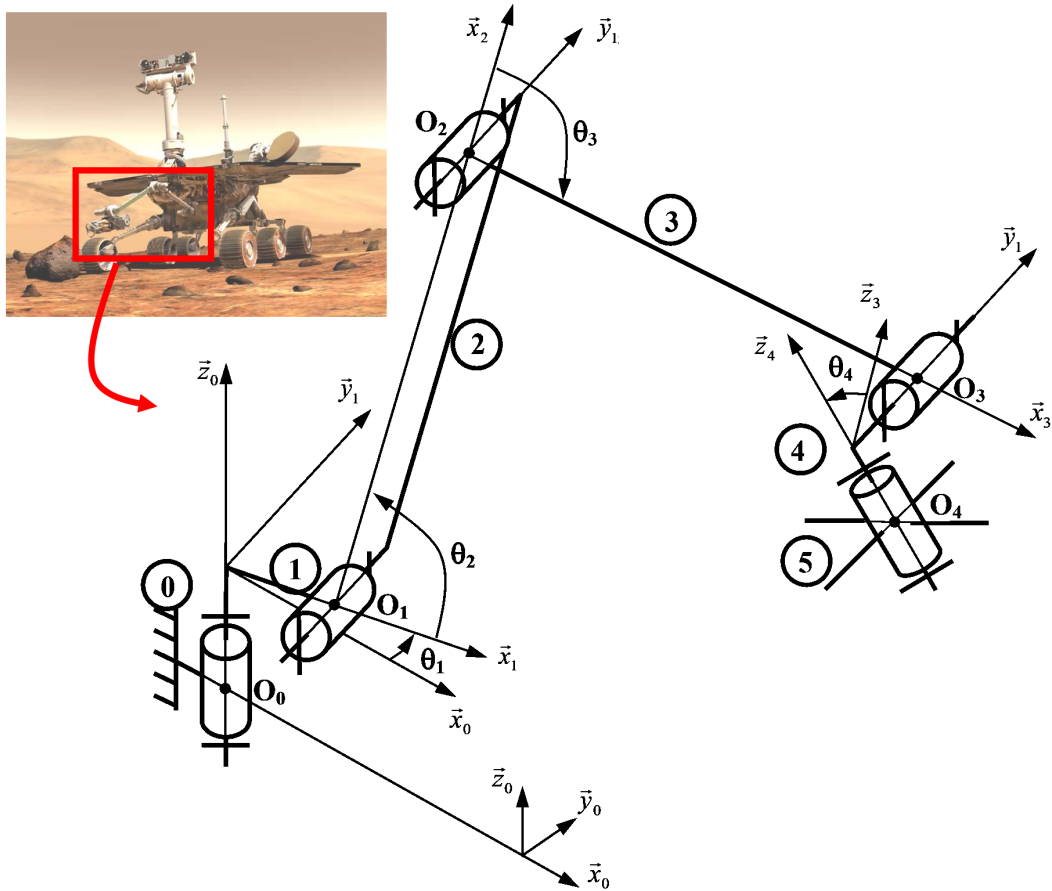
7.5 Phase de déploiement (partie indépendante)

Objectif

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse et l'accélération de certains points du bras articulé. Ces calculs seraient utiles pour imposer une cinématique particulière du bras ou en SPE pour réaliser une étude dynamique

- Le corps du robot est repéré $\mathbf{0}$. On lui attache un repère $R_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et le point O_0 est à la hauteur h_0 du sol, supposée constante ;
- La liaison entre le solide $\mathbf{1}$ et le corps $\mathbf{0}$ du robot est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_0, \vec{z}_0) . On attache au solide $\mathbf{1}$ le repère $R_1 (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on pose $\overrightarrow{O_0O_1} = a_1 \cdot \vec{x}_1 + c_1 \cdot \vec{z}_0$ et $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$;
- La liaison entre le bras $\mathbf{2}$ et le solide $\mathbf{1}$ est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_1, \vec{y}_1) . On attache au solide $\mathbf{2}$ le repère $R_2 (O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, on pose $\overrightarrow{O_1O_2} = a_2 \cdot \vec{x}_2$ et $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $-\pi/4 \leq \theta_2 \leq \pi/4$;
- La liaison entre l'avant bras $\mathbf{3}$ et le bras $\mathbf{2}$ est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_2, \vec{y}_2) . On attache au solide $\mathbf{3}$ le repère $R_3 (O_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, on pose $\overrightarrow{O_2O_3} = a_3 \cdot \vec{x}_3$ et $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $0 \leq \theta_3 \leq \pi$;
- La liaison entre le solide $\mathbf{4}$ et l'avant bras $\mathbf{3}$ est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_3, \vec{y}_3) . On attache au solide $\mathbf{4}$ le repère $R_4 (O_3, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, on pose $\overrightarrow{O_3O_4} = -b_4 \cdot \vec{y}_3 - c_4 \cdot \vec{z}_4$ et $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$ avec $-\pi \leq \theta_4 \leq \pi$;
- La liaison entre le solide $\mathbf{5}$ (sur lequel se trouvent les quatre outils d'étude de la roche) et le solide $\mathbf{4}$ est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_4, \vec{z}_4) . Pas de paramétrage mis en place pour cette liaison.

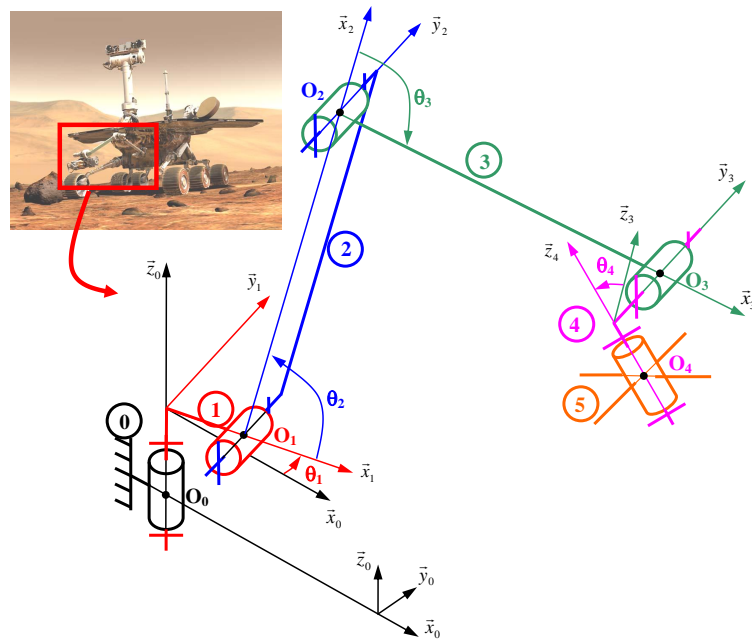
Les positions relatives $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ de chaque solide sont pilotées par 4 actionneurs indépendants notés M_1, M_2, M_3, M_4 constitués d'un moteur, d'un réducteur irréversible et d'un codeur.



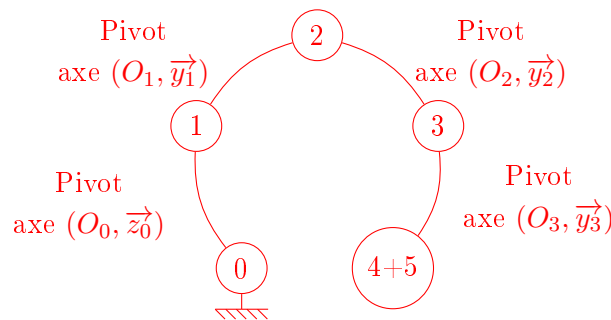
Données :

$$h_0 = 0,5 \text{ m} \quad a_1 = 0,1 \text{ m} \quad c_1 = 0,1 \text{ m} \quad a_2 = 0,5 \text{ m} \quad a_3 = 0,8 \text{ m} \quad b_4 = 0,1 \text{ m} \quad c_4 = 0,15 \text{ m}$$

Question 10 (QI) Repasser d'une couleur différente chaque pièce du schéma cinématique ci dessus. Si vous n'avez pas assez de couleurs faites en sorte qu'il y ait bien un changement de couleur pour chaque liaison.

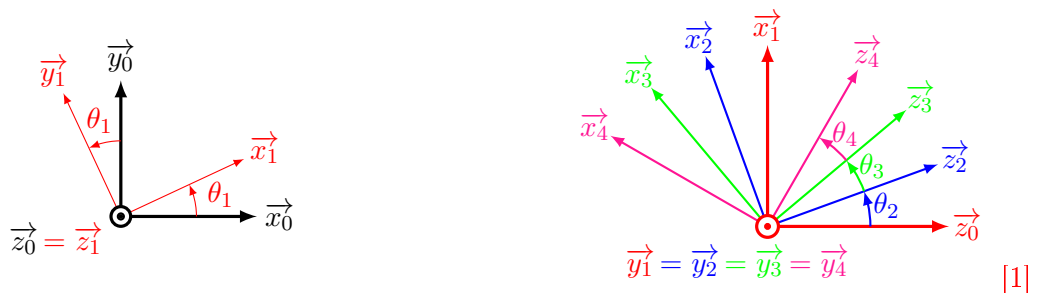


Question 11 (QI) Réaliser le graphe de liaisons du bras articulé du robot Spirit.



Question 12 (QI) Réaliser les figures de changement de bases pour les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 et écrire les vecteurs rotations $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}, \overrightarrow{\Omega}_{2/1}, \overrightarrow{\Omega}_{3/2}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{4/3}$.

ATTENTION : Les figures de calculs sont toujours réalisées avec des angles positifs.



$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0}, \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{y}_1}, \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_1}, \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega}_{4/3} = \dot{\theta}_4 \cdot \vec{y}_1}$$

Question 13 (QI) Déterminer l'expression littérale du vecteur position du point O_4 par rapport à R_2 . ATTENTION le repère d'observation est R_2 .

$$\overrightarrow{O_2 O_4} = \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 O_4}$$

$$\overrightarrow{O_2O_4} = a_3 \cdot \vec{x}_3 - b_4 \cdot \vec{y}_1 - c_4 \cdot \vec{z}_4$$

Question 14 Déterminer l'expression littérale de $\overrightarrow{V_{O_4/2}}$, vous factoriserez votre résultat suivant les vecteurs unitaires. ATTENTION le repère d'observation est R_2 .

Travail préparatoire :

- $\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_2} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_3}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_2}} \wedge \vec{x}_3 = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_3 = -\dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3$
- $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ donc $\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_2} = \vec{0}$
- $\left[\frac{d\vec{z}_4}{dt} \right]_{R_2} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{z}_4}{dt} \right]_{R_4}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_4/R_2}} \wedge \vec{z}_4 = (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_4 = (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \cdot \vec{x}_4$

Assemblage du résultat demandé :

$$\overrightarrow{V_{O_4/2}} = \begin{matrix} -\vec{z}_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot a_3 \\ -\vec{x}_4 \cdot (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \cdot c_4 \end{matrix}$$

Question 15 Déterminer l'expression littérale de $\overrightarrow{\Gamma_{O_4/2}}$, vous factoriserez votre résultat suivant les vecteurs unitaires. ATTENTION le repère d'observation est R_2 .

Par définition $\overrightarrow{\Gamma_{O_4/2}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{O_4/2}}}{dt} \right]_{R_2}$

Travail préparatoire :

- $\left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{R_2} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{R_3}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_3/R_2}} \wedge \vec{z}_3 = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_3 = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_3$
- $\left[\frac{d\vec{x}_4}{dt} \right]_{R_2} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{x}_4}{dt} \right]_{R_4}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{R_4/R_2}} \wedge \vec{x}_4 = (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_4 = -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \cdot \vec{z}_4$

Assemblage du résultat demandé :

$$\overrightarrow{\Gamma_{O_4/2}} = \begin{matrix} -\vec{z}_3 \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot a_3 \\ -\vec{x}_3 \cdot \dot{\theta}_3^2 \cdot a_3 \\ -\vec{x}_4 \cdot (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \cdot c_4 \\ \vec{z}_4 \cdot (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \cdot c_4 \end{matrix}$$

Question 16 (QI) Déterminer l'expression littérale du vecteur position du point O_2 par rapport à R_0 .

$$\overrightarrow{O_0O_2} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\overrightarrow{O_0O_2} = a_1 \cdot \vec{x}_1 + c_1 \cdot \vec{z}_0 + a_2 \cdot \vec{x}_2$$

Question 17 Déterminer l'expression littérale de $\overrightarrow{V}_{O_2/0}$, vous factoriserez votre résultat suivant les vecteurs unitaires.

Par définition $\overrightarrow{V}_{O_2/0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_2}}{dt} \right]_{R_0}$

Travail préparatoire :

- $\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_1}$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right]_{R_2}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{x_2} = (\dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{x_2} = -\dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \overrightarrow{y_1}$

Assemblage du résultat demandé :

$$\overrightarrow{V}_{O_2/0} = \begin{matrix} +\overrightarrow{y_1} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot (a_1 + a_2 \cdot \cos \theta_2) \\ -\overrightarrow{z_2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot a_2 \end{matrix}$$

Question 18 Déterminer l'expression littérale de $\overrightarrow{\Gamma}_{O_2/0}$, vous factoriserez votre résultat suivant les vecteurs unitaires.

Par définition $\overrightarrow{\Gamma}_{O_2/0} = \left[\frac{d\overrightarrow{V}_{O_2/0}}{dt} \right]_{R_0}$

Travail préparatoire :

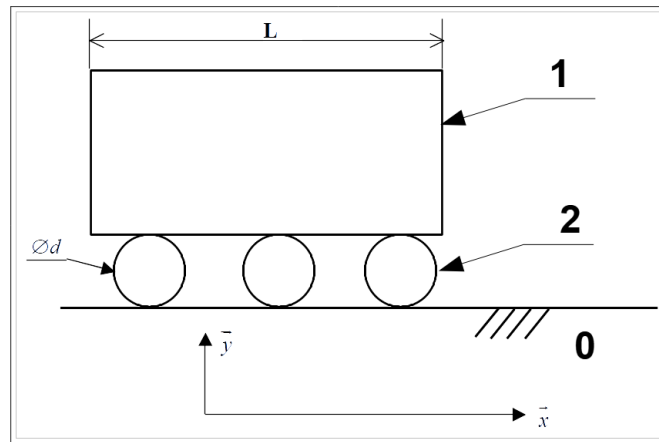
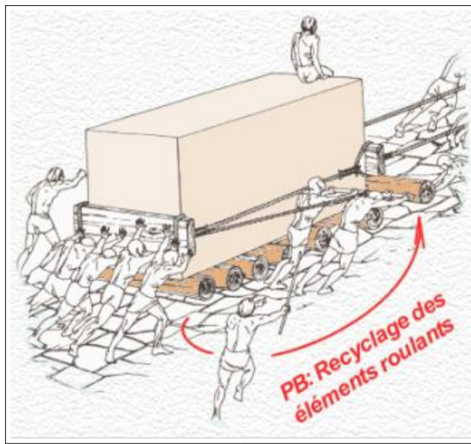
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_{R_1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_1}$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt} \right]_{R_2}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \overrightarrow{z_2} = (\dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_0}) \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \overrightarrow{y_1}$

Assemblage du résultat demandé :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{O_2/0} = \begin{matrix} +\overrightarrow{y_1} \cdot \left[\ddot{\theta}_1 \cdot (a_1 + a_2 \cdot \cos \theta_2) - 2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot a_2 \cdot \sin \theta_2 \right] \\ -\overrightarrow{x_1} \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot (a_1 + a_2 \cdot \cos \theta_2) \\ -\overrightarrow{z_2} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot a_2 \\ -\overrightarrow{x_2} \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot a_2 \end{matrix}$$

8 Un problème de l'Égypte antique

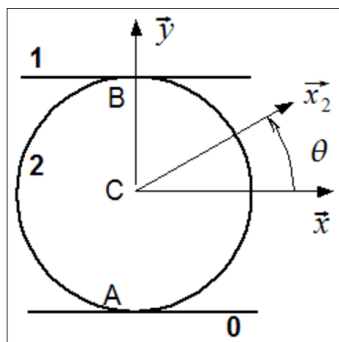
Que l'on retrouve encore de nos jours (patins à rouleaux)



Penchons-nous quelques minutes sur le sort de ces égyptiens qui déplaçaient les blocs de pierre des carrières jusqu'aux lieux de constructions des pyramides pour préparer l'industrie touristique de leurs descendants du XXIème siècle (quelle abnégation!)

On suppose que

- le problème est supposé plan de normale \vec{z} ;
- le bloc de pierre 1 est animé d'un mouvement de translation suivant la direction \vec{x} , de vitesse V dans le sens de \vec{x} : $\vec{V}_{B \in 1/0} = V \cdot \vec{x}$



- La base lié au sol 0 est $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- Le bloc de pierre 1, de base lié $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, roule sans glisser sur le rouleau 2 en B ;
- Le rouleau 2, de repère lié $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ avec $\theta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_2)$, roule sans glisser sur le sol 0 en A, le diamètre du rouleau est d .

Question 1 Écrire le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_{\forall M}$

Question 2 Écrire la condition de roulement sans glissement au point A entre 2 et 0. La condition de roulement sans glissement au point A entre 2 et 0 se traduit par : $\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{0}$

Question 3 Écrire la condition de roulement sans glissement au point B entre 2 et 1, en déduire $\vec{V}_{B \in 2/0}$ La condition de roulement sans glissement au point B entre 2 et 1 se traduit par : $\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{0}$

donc $\vec{V}_{B \in 2/0} + \vec{V}_{B \in 0/1} = \vec{0}$ il vient : $\vec{V}_{B \in 2/0} = V \cdot \vec{x}$

Question 4 Écrire la relation de Varignon (champs des vecteurs vitesses) entre $\vec{V}_{B \in 2/0}$ et $\vec{V}_{A \in 2/0}$,

en déduire $\dot{\theta}$ en fonction de V et d . $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

$$V \cdot \vec{x} = \vec{0} - d \vec{y} \wedge \dot{\theta} \cdot \vec{z}$$

$$V \cdot \vec{x} = -d \cdot \dot{\theta} \vec{x} \text{ donc } \dot{\theta} = -\frac{V}{d}$$

Question 5 Écrire le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$ au point A en fonction de V et d , en déduire $\overrightarrow{V_{C \in 2/0}}$ en fonction de V et d , puis justifier la nécessité de recycler les rouleaux.

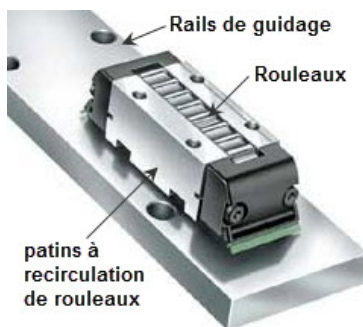
$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -(V/d) \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/0}} = -\frac{d}{2} \cdot \vec{y} \wedge -\frac{V}{d} \cdot \vec{z} \text{ donc } \overrightarrow{V_{C \in 2/0}} = \frac{V}{2} \cdot \vec{x}$$

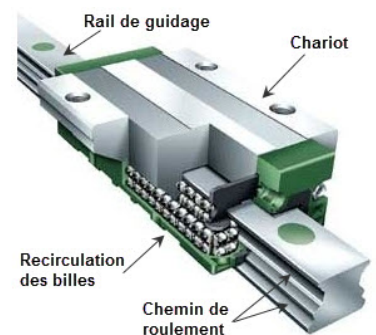
Les axes des rouleaux se déplacent deux fois moins vite que le bloc, il faut donc les recycler.

Compléments pour votre culture technologique



Les **patins à recirculation de rouleaux** sont adaptés, en association avec les rails de guidage, pour des dispositions palier fixe/fixe ou palier fixe/libre et forment un système de palier pour des mouvements linéaires avec des courses illimitées. Leur capacité de charge est très élevée; l'encombrement nécessaire est, par contre, assez réduit. Grâce à de nombreuses possibilités dans la disposition des éléments de guidage, les guidages par patins à rouleaux conviennent pour de multiples applications en construction mécanique générale, notamment pour des guidages linéaires dans les machines-outils, si une précision de guidage et de positionnement avec de longs déplacements est demandée.

Les **guidages linéaire sur rail profilé** sont des guidages linéaires à billes ou à rouleaux, compacts, avec une rigidité et une capacité de charge élevées. Ces guidages supportent des charges dans toutes les directions (hormis le sens de déplacement) et des moments autour de tous les axes. Pour réduire la fréquence et les coûts d'entretien, les guidages sur rails profilés possèdent un réservoir de lubrifiant. Une étanchéité complète de tous les côtés des chariots de guidage protège les systèmes de roulement contre les impuretés, même dans des conditions sévères.



9 Dispositif Médical d'injection

source : extrait CCP PSI 2015 MODÉLISATION ET INGÉNIERIE NUMÉRIQUE

9.1 Présentation du système

De nombreux dispositifs sont actuellement développés afin d'améliorer la qualité des injections ou l'ergonomie pour les patients.

Actuellement, il existe deux types de contenant pour les solutions médicamenteuses : le *vial* et la *cartouche* (FIGURE 12).

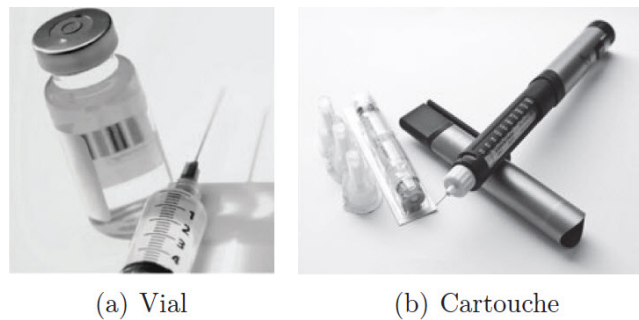


FIGURE 12 – Différents contenants actuels

9.1.1 Dispositifs Médicaux d'Injection innovants (*DMI*)

Eveon, jeune start-up dans le monde des dispositifs médicaux d'injection, a l'ambition de réaliser un *DMI* sécurisé, automatisé et facile d'utilisation. Le dispositif réalisé est un *DMI* monodose, miniaturisé, automatique et adapté à tout type d'injection. Ce dispositif est présenté schématiquement sur la FIGURE 13.

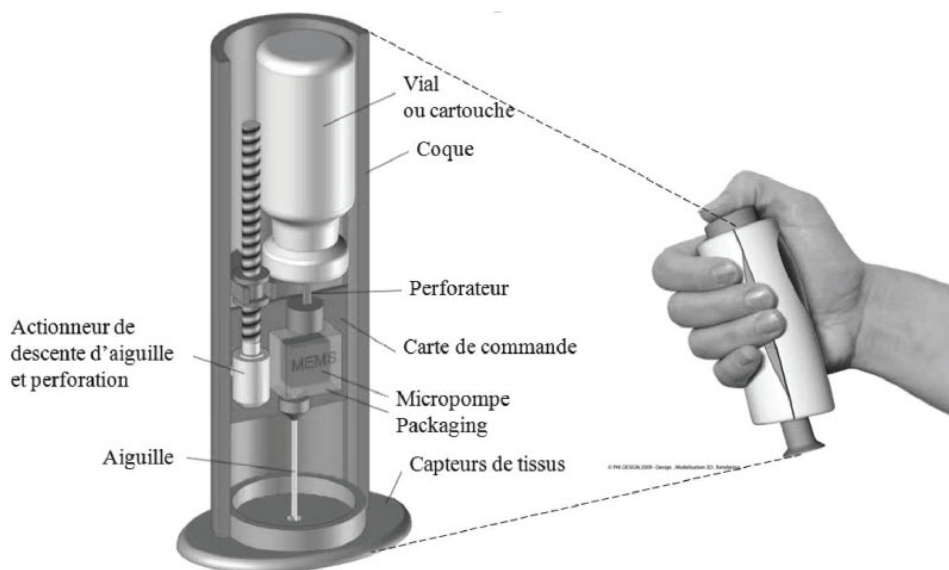


FIGURE 13 – Dispositif médicalisé d'injection de l'entreprise *Eveon*

La solution retenue pour la pompe est l'utilisation d'une micropompe à membrane *MEMS*, permettant de résoudre les problèmes liés à l'utilisation d'un piston.

Le principe est simple : il s'agit de déformer une membrane délimitant un volume donné afin de créer successivement dans celui-ci des phases de dépression et de sur-pression, permettant via un système de clapet de respectivement aspirer le liquide puis de le refouler. Le principe est décrit sur les FIGURE 19 page 38.

La déformation de la membrane est assurée par un actionneur thermique collé sur la face supérieure de la membrane, mais également par un actionneur piézoélectrique permettant d'assurer une action mécanique suffisante sur la membrane en cas de pression élevée dans la cavité de la pompe. En effet, l'actionneur thermique étant peu puissant et la température d'échauffement limitée pour ne pas dégrader le liquide médicamenteux, il est nécessaire de prévoir un actionneur de secours pour assurer les mouvements de la membrane.

Le système d'injection ainsi asservi par un système de capteurs de débit (débitmètre) est modélisé par le schéma-bloc fonctionnel simplifié donné sur la FIGURE 20 page 39.

9.1.2 Exigences du système

Un extrait des exigences du système est donné sur la FIGURE 18 page 37.

— Objectif —

Modéliser le système médicalisé d'injection afin de vérifier les performances du cahier des charges concernant le contrôle de la quantité de solution injectée.

9.2 Modélisation de l'asservissement du volume injecté

Dans la suite du sujet, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ sera notée $F(p)$.

L'actionneur thermique est une membrane bimétallique qui, sous l'effet thermique, se déforme.

Elle fonctionne sur le principe suivant : si on accole deux matériaux possédant des coefficients de dilatation thermique différents, une élévation de la température va provoquer la déformation de la membrane du côté du matériau possédant le coefficient de dilatation le plus élevé (FIGURE 14 page 34).

Afin d'identifier le comportement de l'actionneur thermique, on réalise un essai en alimentant l'actionneur sous un échelon de tension $u_{th} = 12\text{ V}$.

Question 1 A l'aide de la courbe de réponse obtenue (FIGURE 14b page 34), déterminer la fonction de transfert de l'actionneur thermique $H_{ath}(p) = \frac{F_{th}(p)}{U_{th}(p)}$

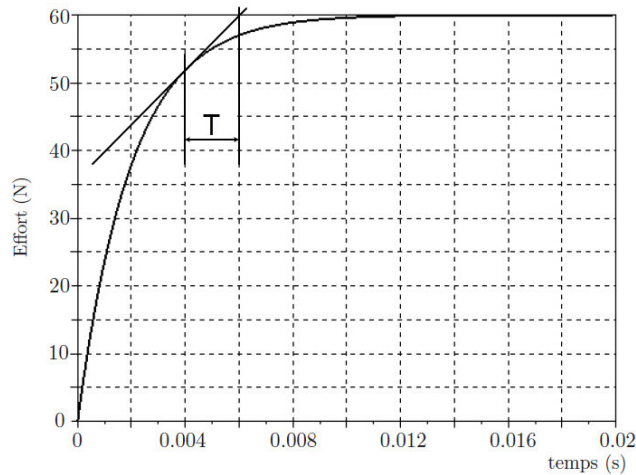
On propose un modèle du premier ordre car :

- présence d'une asymptote horizontale ;
- présence d'une tangente oblique à l'origine ;
- pas de point d'inflexion ;

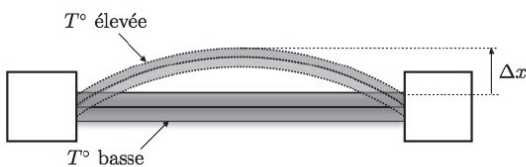
La fonction de transfert est de la forme
$$H_{ath}(p) = \frac{F_{th}(p)}{U_{th}(p)} = \frac{K}{1 + T.p}$$

Avec :

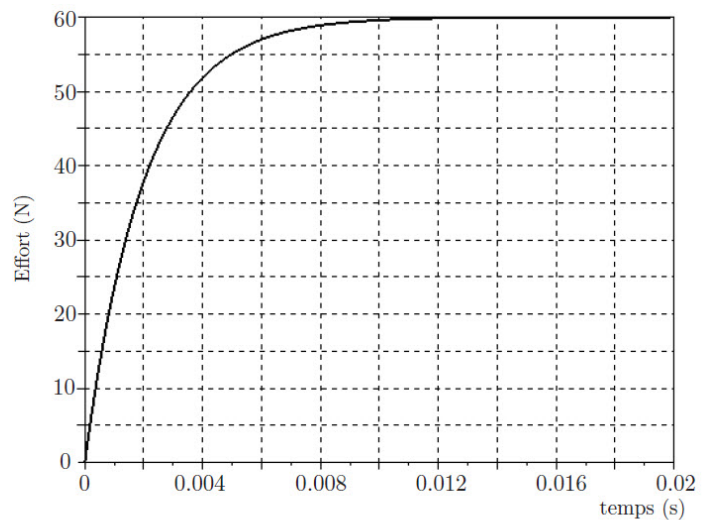
- $K = \frac{VF}{E0} = \frac{60\text{ N}}{12\text{ V}} = 5\text{ N/V}$
- En traçant une tangente à la courbe on obtient $T = 2\text{ ms}$.



(b) Réponse à un échelon de tension



(a) Actionneur thermique



(b) Réponse à un échelon de tension

FIGURE 14 – Actionneur thermique et réponse à un échelon de tension

En réalité, l'actionneur thermique est alimenté par une tension hachée, puisqu'il est successivement chargé et déchargé pour obtenir l'effet de pompage.

9.2.1 Commande de l'actionneur piézoélectrique

L'actionneur piézoélectrique (FIGURE 15 page 35) est actionné en cas d'insuffisance de l'actionneur thermique à respecter le débit imposé. Cette condition est vérifiée par le capteur de débit étudié ci-après et des capteurs de température disposés sur la membrane. L'objectif de ces capteurs est de vérifier que la température de la membrane ne dépasse pas la valeur imposée par le cahier des charges (45°C).

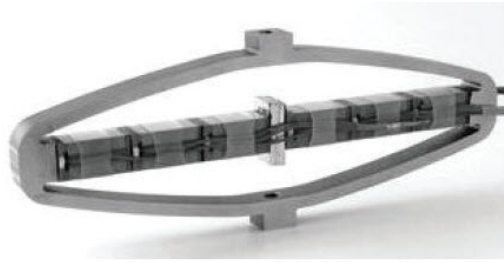


FIGURE 15 – Actionneur piézoélectrique utilisé

Question 2 En supposant que le capteur de température fournit la valeur de la température notée T . Écrire une fonction `actionner(T)` qui retourne `True` si $T \leq 45$ et `False` si $T > 45$.

```

1 def actionner(T):
2     if T <= 45 :
3         return True
4     return False

```

9.3 Simulation de l'asservissement en volume injecté

Le schéma-bloc retenu pour cette partie est donné ci-dessous (FIGURE 16). Il correspond à un modèle simplifié du schéma-bloc fonctionnel donné FIGURE 20 page 39.

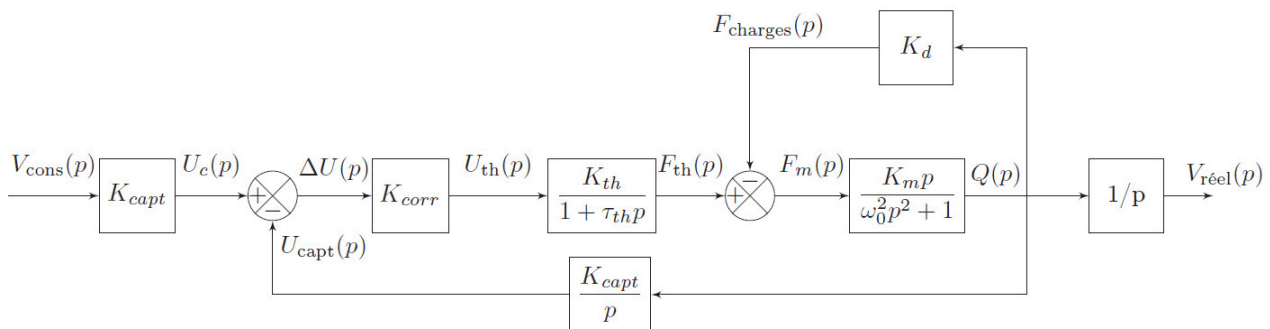


FIGURE 16 – Schéma-bloc fonctionnel simulé

Question 3 Déterminer la fonction de transfert de l'asservissement du volume délivré $H(p) = \frac{V_{rel}(p)}{V_{cons}(p)}$

On commence par appliquer la formule de Black sur la boucle interne :

$$\frac{Q(p)}{F_{th}(p)} = \frac{\frac{K_m \cdot p}{\omega_0^2 \cdot p^2 + 1}}{1 + \frac{K_m \cdot p}{\omega_0^2 \cdot p^2 + 1} \cdot K_d} = \frac{K_m \cdot p}{\omega_0^2 \cdot p^2 + 1 + K_m \cdot p \cdot K_d}$$

On applique à nouveau la formule de Black sur la boucle restante :

$$H(p) = \frac{V_{rel}(p)}{V_{cons}(p)} = K_{capt} \cdot \frac{K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_{th} \cdot p} \cdot \frac{K_m \cdot p}{\omega_0^2 \cdot p^2 + 1 + K_m \cdot p \cdot K_d}}{1 + K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_{th} \cdot p} \cdot \frac{K_m \cdot p}{\omega_0^2 \cdot p^2 + 1 + K_m \cdot p \cdot K_d} \cdot \frac{K_{capt}}{p}}$$

$$H(p) = \frac{V_{rel}(p)}{V_{cons}(p)} = \frac{K_{capt} \cdot K_{cor} \cdot K_{th} \cdot K_m}{(1 + \tau_{th} \cdot p) \cdot (\omega_0^2 \cdot p^2 + 1 + K_d \cdot p \cdot K_m) + K_{capt} \cdot K_{cor} \cdot K_{th} \cdot K_m}$$

Une simulation effectuée avec un correcteur de gain $K_{corr} = 1$ et une entrée échelon d'amplitude 5 ml donne le résultat suivant :

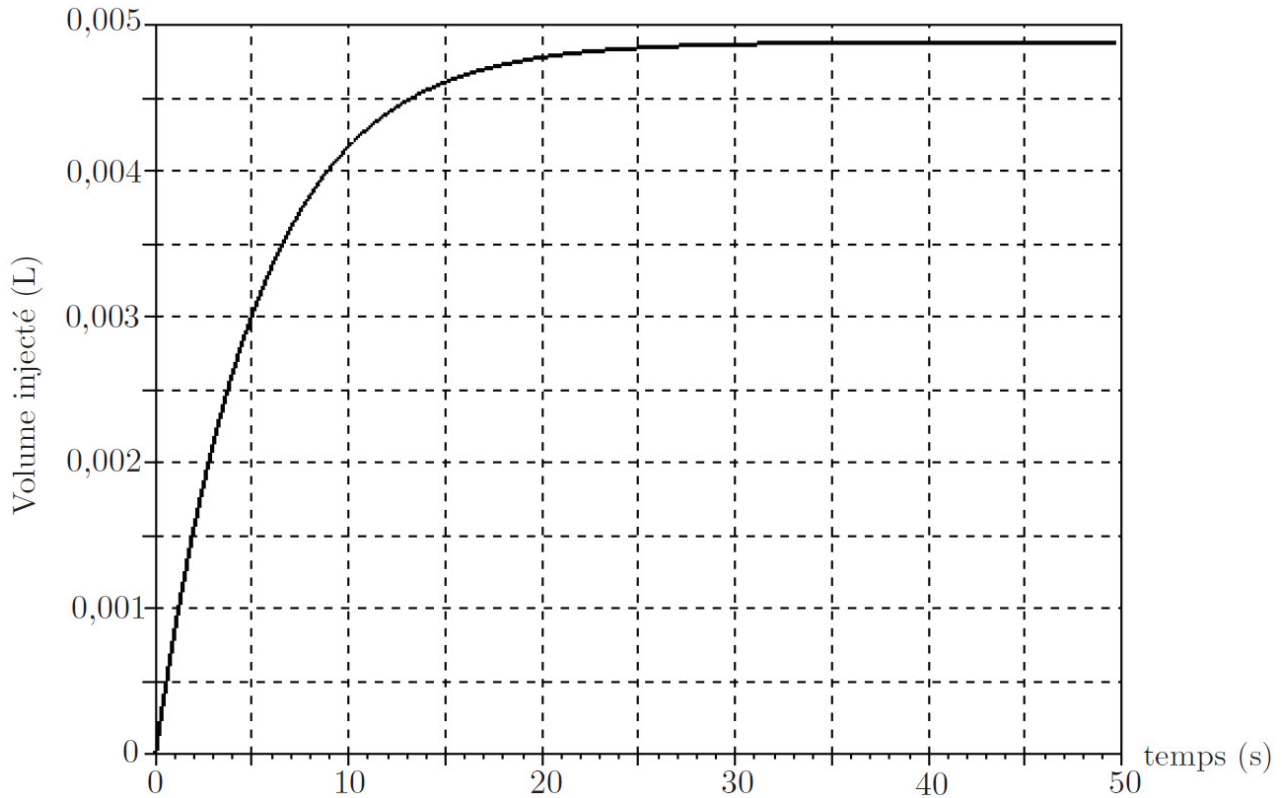
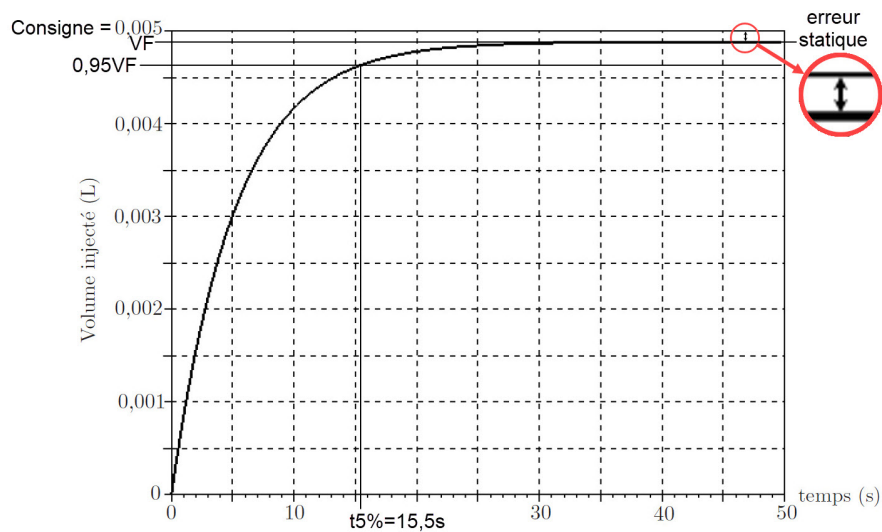


FIGURE 17 – Simulation d'injection d'un volume de 5 ml avec $K_{corr} = 1$

Question 4 Le système est-il précis pour une entrée de type échelon de volume ? Justifier.

Le système présente une erreur statique non nulle, donc il n'est pas précis !



Question 5 Le système ainsi réalisé respecte-t-il les exigences définies par le constructeur ?

La valeur finale vaut 4,86 ml, d'après le cahier des charges la quantité minimale d'injection doit être de 4,99 ml donc le critère *Précision d'injection* n'est pas respecté.

Le temps de réponse à 5% vaut 15,5s > 15s donc le critère *Rapidité* n'est pas respecté.

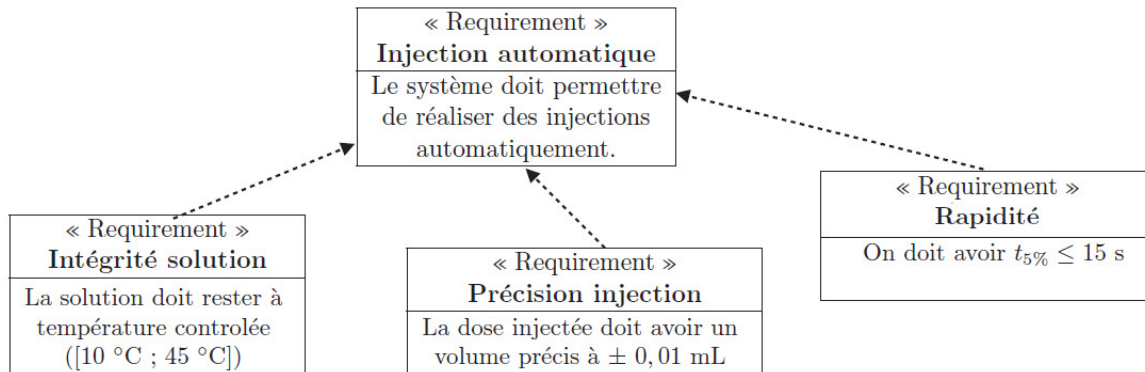


FIGURE 18 – Diagramme partiel des exigences

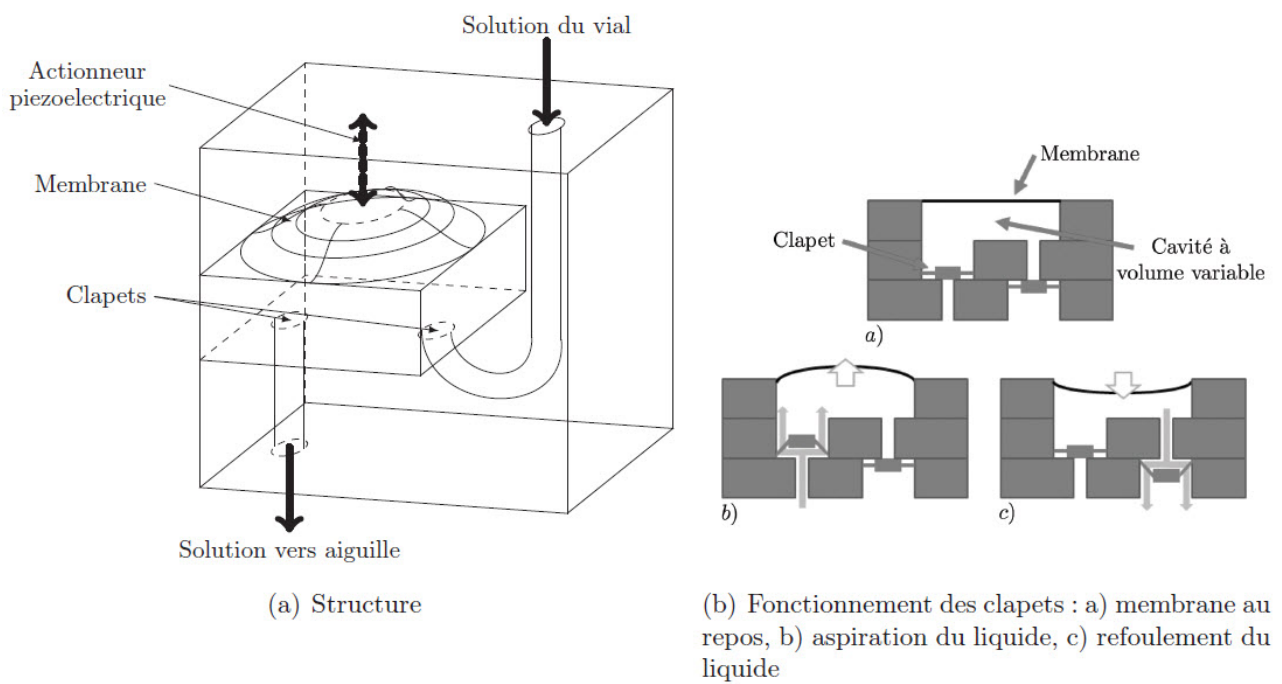


FIGURE 19 – Micropompe à membrane

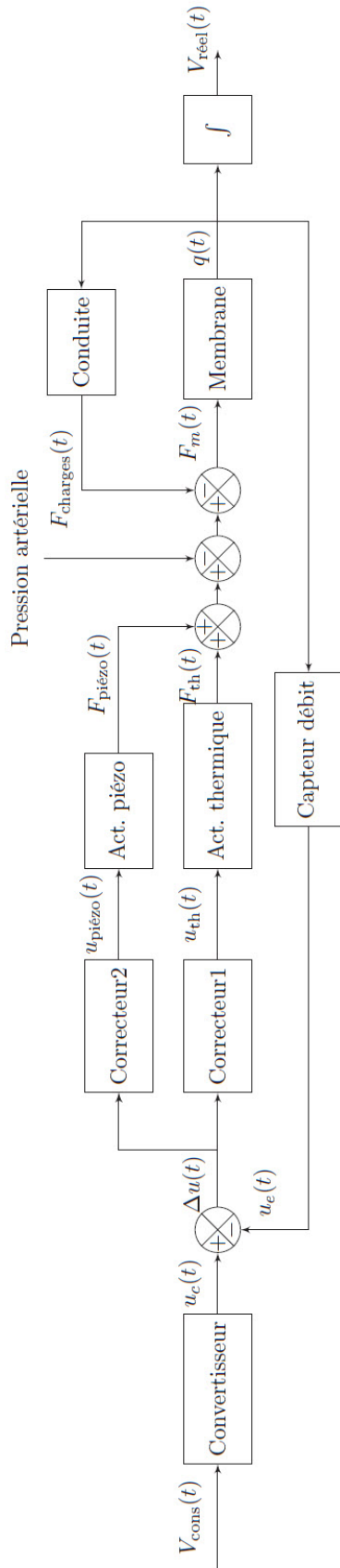


Figure 15 – Schéma-bloc fonctionnel simplifié

On retrouve ainsi sur ce schéma-bloc fonctionnel les grandeurs :

- $V_{cons}(t)$ le volume de la solution à injecter ;
- $V_{réel}(t)$ le volume réel déjà injecté de la solution ;
- $u_c(t)$ la tension consigne proportionnelle au volume à injecter ;
- $u_{piézo}$ et u_{th} les tensions de commande après correction envoyées aux actionneurs piézoélectrique et thermique ;
- F_{th} , $F^{piézo}$, $F_{charges}$ les actions mécaniques exercées sur la membrane par respectivement l'actionneur thermique, l'actionneur piézoélectrique et la pression de la solution injectée créée par les pertes de charge dans la conduite et la pression artérielle ;
- $q(t)$ le débit de solution ;
- $u_e(t)$ la tension image du volume de solution injecté.

FIGURE 20 – Micropompe à membrane