ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (***)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour x réel de
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux puis
$$f(x,t) = \frac{1 - at - (1 - bt) + \mathrm{o}(t)}{t} \cos(xt) = (a - b + \mathrm{o}(1)) \cos(xt) \xrightarrow[t \to 0]{} a - b$$

et par croissances comparées $\qquad f(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I et par conséquent
$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et intégrable d'après l'étide précédente.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \left(\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}\right) \sin(xt)$$
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$ et φ intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{b}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

Soit x réel. Par dérivation sous l'intégrale, il vient
$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}\right] \sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t$, il vient

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-(b-\mathrm{i}x)t} - \mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}x)t}\right]\, \mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{b-\mathrm{i}x} - \frac{1}{a-\mathrm{i}x}\right)$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{x}{b^2+x^2} - \frac{x}{a^2+x^2}}$$

3. Par intégration il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$, on emploie une technique à la « Riemann-Lebesgue ». On pose

$$\forall t > 0 \qquad \varphi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

Les fonctions φ et $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t)\frac{\sin(xt)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin(xt)}{x}\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par dérivation $$\forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = \frac{t\left(-a\mathrm{e}^{-at} + b\mathrm{e}^{-bt}\right) - \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt}}{t^2}$$

d'où $$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2(a^2-b^2)/2 + \mathrm{o}(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{a^2-b^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi'(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi, la fonction φ' est intégrable sur I et par inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Par suite $$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{O}(1)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit $\alpha = 0$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right)}$$

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x\tan(t))}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \left]\, 0\,; \dfrac{\pi}{2} \,\right[$. On vérifie :

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec

$$f(x,t) \xrightarrow[t \to 0]{} x \quad \text{et} \quad f(x,t) \xrightarrow[t \to \frac{\pi}{2}]{} 0$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ donc intégrable sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1 + (x\tan(t))^2}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La dominante φ est clairement continue par morceaux, intégrable sur I. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. La fonction F est clairement impaire. On restreint l'étude à $x \geqslant 0$. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (x\tan(t))^2}$$

Le changement de variable $u = \tan(t)$ donne

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}$$

Par décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$, on obtient

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{x^2}{1+x^2u^2} \right] \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x}$$

et l'égalité vaut aussi pour $x = 1$ puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F' continue en 1. Par intégration, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+v)(1+x^2v)} = \frac{x^2v + 1 - x^2(v+1)}{(1+v)(1+x^2v)} \frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $v=u^2$.

3. On a $\text{Arctan}\,(\tan(t)) = t$ pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ d'où

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(1) = \frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(\sin(t))$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ avec

$$t\ln(\sin(t)) = t\ln(t+\mathrm{o}(t)) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad t\ln(\sin(t)) \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{[t\ln(\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Ainsi
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

Exercice 3 (****)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. La continuité de F sur $\mathbb{R}_+$ est traitée dans l'exercice 3 de la feuille 7. Soit $x \geqslant 0$. On a $t \mapsto \dfrac{1}{x+t}$ et $t \mapsto 1-\cos(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$-\frac{1-\cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1-\cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$$

Ainsi, les intégrales $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

on établit sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies, continues sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin u - \sin(x)\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Les intégrales $\mathrm{A}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{B}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent (voir exercice 4, question 2, feuille n°2). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x) - \sin(x)\mathrm{B}(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathscr{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec A' et B' de classe $\mathscr{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathscr{C}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

et avec $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{A}'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{x}$

on trouve finalement

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G vérifient } y'' + y = \frac{1}{x} \text{ sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

3. La fonction $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $\mathrm{F} - \mathrm{G} = a\cos + b\sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

et $\qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x)\sin(x)\mathrm{B}(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

Par suite $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc la fonction $a\cos + b\sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$$

Par continuité de F et G en 0, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Et on conclut $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(t)^x \,\mathrm{d}t$$

Déterminer $$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$$

Corrigé : On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad g(x,t) = f(t)^x = \exp\,[x\ln f(t)]$

avec $\mathrm{X} = \mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. Montrons que $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.

- Pour tout $x \in \mathrm{X}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment.
- Pour tout $t \in \mathrm{I}$, d'après les théorèmes généraux, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X.
- Soit $x \in \mathrm{X}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln f(t)\exp\,[x\ln f(t)]$ est continue sur I d'après les théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = |\ln f(t)|\exp|\ln f(t)|$$

La fonction φ est continue donc intégrable sur le segment I. Par régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction F est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\,0\,;1\,] \text{ et } \mathrm{F}'(x) = \int_0^1 \ln f(t)\exp\,[x\ln f(t)]\,\mathrm{d}t \text{ pour } x \in [\,0\,;1\,].}$$

Ensuite, pour $x \in \,]\,0\,;1\,]$, il vient

$$\mathrm{F}(x)^{1/x} = \exp\left[\frac{\ln \mathrm{F}(x)}{x}\right] = \exp\left[\frac{\ln\mathrm{F}(x) - \ln\mathrm{F}(0)}{x-0}\right]$$

On voit donc apparaître naturellement un taux d'accroissement dans l'expression à étudier. Par conséquent, comme F est dérivable, il vient par continuité de la fonction exponentielle

$$\mathrm{F}(x)^{1/x} = \exp\left[\frac{\ln\mathrm{F}(x) - \ln\mathrm{F}(0)}{x-0}\right] \xrightarrow[x\to 0^+]{} \exp\left[\frac{\mathrm{F}'(0)}{\mathrm{F}(0)}\right]$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{F}(x)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \exp\left[\int_0^1 \ln f(t)\,\mathrm{d}t\right]}$$

Avec $f(t) \leqslant \|f\|_\infty$, on obtient sans difficulté $\mathrm{F}(x)^{1/x} \leqslant \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, sa borne supérieure sur le segment $[\,0\,;1\,]$ est atteinte et par conséquent il existe un segment $[\,a\,;b\,] \subset [\,0\,;1\,]$ avec $b > a$ tel que

$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant f(t)$$

d'où $$\int_a^b (\|f\|_\infty - \varepsilon)^x \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)^x\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x)$$

puis $$(b-a)^{1/x}\,(\|f\|_\infty - \varepsilon) \leqslant \mathrm{F}(x)^{1/x}$$

Comme $(b-a)^{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, il existe un seuil $\mathrm{A} > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant \mathrm{A} \qquad (b-a)^{1/x}\,(\|f\|_\infty - \varepsilon) \geqslant \|f\|_\infty - 2\varepsilon$$

d'où $\qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{A} > 0 \quad | \quad \forall x \geqslant \mathrm{A} \qquad \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leqslant \mathrm{F}(x)^{1/x} \leqslant \|f\|_\infty$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{F}(x)^{1/x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \|f\|_\infty}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. On suppose que P n'admet pas de racine. On pose

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \qquad \psi_r(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s\right)$$

et
$$\forall r \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s$$

1. Soit $r \geqslant 0$. Justifier que ψ_r est bien définie, dérivable et déterminer $\psi_r'(t)$ pour t réel.
2. Soit $r \geqslant 0$. Déterminer une expression simple de $\psi_r(t)$ pour t réel et en déduire que la fonction F est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
3. Justifier que F est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ puis déterminer $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathrm{F}(r)$.
4. Conclure en établissant le théorème de d'Alembert-Gauss.

Corrigé : 1. Comme P n'admet pas de racine, l'intégrande de ψ_r est bien définie, continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction ψ_r est donc bien définie, dérivable avec

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \psi_r'(t) = \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\psi_r(t)}$$

2. Soit $r \geqslant 0$. On observe $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right] = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ est solution de l'équation différentielle

$$x' - \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} x = 0$$

On en déduit $\psi_r \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right)$. Il en résulte en particulier que ψ_r est périodique d'où $\psi_r(2\pi) = \psi_r(0) = 1$. Ainsi, on a

$$\forall r \geqslant 0 \qquad \exp\left(2\mathrm{i}\pi\mathrm{F}(r)\right) = 1$$

On conclut
$$\boxed{\text{La fonction F est à valeurs dans } \mathbb{Z}.}$$

3. On pose $\qquad \forall (r,s) \in [\,0\,;+\infty\,[\times [\,0\,;2\pi\,] \qquad f(r,s) = \dfrac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$

Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $r \geqslant 0$, on a $f(r,\cdot) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;2\pi\,], \mathbb{R})$.
• Pour $s \in [\,0\,;2\pi\,]$, on a $f(\cdot, s) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
• Domination : Soit $a \geqslant 0$. L'ensemble $[\,0\,;a\,] \times [\,0\,;2\pi\,]$ est compact comme produit de compacts et la fonction continue $(r,s) \mapsto f(r,s)$ y atteint ses bornes ce qui fournit une domination. Ainsi, la fonction F est continue sur $[\,0\,;a\,]$ pour tout $a \geqslant 0$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[, \mathbb{R})}$$

Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec n entier non nul et $a_n \neq 0$. Pour $r \geqslant 0$ et s réel, on trouve

$$P(re^{is}) \underset{r\to+\infty}{=} a_n r^n e^{ins} + o(r^n) \quad \text{et} \quad re^{is}P'(re^{is}) \underset{r\to+\infty}{=} na_n r^n e^{ins} + o(r^n)$$

d'où
$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} re^{is} \xrightarrow[r\to+\infty]{} n$$

Montrons une domination en vue d'utiliser le théorème de convergence dominée. On pose

$$\forall (r,s) \in [\,0\,;+\infty\,[\times [\,0\,;2\pi\,] \qquad \Delta(r,s) = |f(r,s) - n|$$

Soit $(r,s) \in [\,0\,;+\infty\,[\times [\,0\,;2\pi\,]$. Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\Delta(r,s) = \frac{\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k(k-n)r^k e^{iks}\right|}{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{iks}\right|} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,(n-k)r^k}{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{iks}\right|}$$

On remarque
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, r^k \underset{r\to+\infty}{=} o(r^n)$$

Soit $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$. On dispose d'un seuil $R \geqslant 0$, indépendant de s puisque le membre de droite dans l'inégalité ne dépend plus que de r, tel que

$$\forall r \geqslant R \qquad \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks}\right| \leqslant \varepsilon\, |a_n|\, r^n$$

Ainsi
$$|a_n r^n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks}\right| \geqslant |a_n|\, r^n(1-\varepsilon)$$

Et par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{iks}\right| = \left|a_n r^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks}\right| \geqslant \left||a_n r^n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks}\right|\right| \geqslant |a_n|\, r^n(1-\varepsilon)$$

Il vient
$$\Delta(r,s) \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,(n-k)r^k}{|a_n|\, r^n(1-\varepsilon)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, on dispose d'un seuil $R' \geqslant R$, indépendant de s puisque le membre de droite dans l'inégalité ne dépend plus que de r, tel que

$$\forall r \geqslant R' \qquad \Delta(r,s) \leqslant 1$$

Toujours par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall (r,s) \in [\,R'\,;+\infty\,[\times [\,0\,;2\pi\,] \qquad |f(r,s)| \leqslant \Delta(r,s) + n \leqslant n+1$$

Et par convergence dominée
$$\boxed{F(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\, ds = n}$$

4. On a établi précédemment que la fonction F est constante d'où $F(r) = n$ pour tout $r \geqslant 0$. Or, on a clairement $F(0) = 0$ ce qui est contradictoire puisque $n \geqslant 1$. L'hypothèse faite sur P est donc fausse et on conclut avec le théorème de d'Alembert-Gauss

$$\boxed{\text{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \text{ admet une racine.}}$$