Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 2 (*)

Pour x réel, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{F}' + \mathrm{G}'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 (*)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Lambda = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x)$. On pourra chercher à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$.

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Établir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

   On admettra l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 5 (**)

Pour $x > 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, calculer $\mathrm{F}''(x)$ puis $\mathrm{F}'(x)$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Exercice 7 (**)

À l'aide d'une intégrale à paramètre, établir que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.