ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°05

Exercice 1 (**)

On pose $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 2 (**)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin(t)^2)\, \mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
3. Préciser une expression de $\mathrm{F}'(x)$ avec $x \geqslant 0$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$.
4. Conclure que $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \pi\left[\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln 2\right]$$

Exercice 3 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (***)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{F}'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$.
4. Calculer $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 5 (***)

Pour $x > 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6 (****)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.