ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (***)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour x réel de
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer F'.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Indications : 3. Considérer $\varphi : t > 0 \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ et utiliser l'idée du lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x\tan(t))}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Indications : 2. Restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$ en observant l'imparité de F. Effectuer le changement de variables $u = \tan(t)$ dans F' puis réaliser une décomposition en éléments simples pour $x \neq 1$. On pourra poser $v = u^2$ momentanément. En déduire une expression de F' et justifier sa validité en $x = 1$.
3. Pour la deuxième intégrale, intégrer par parties.

Exercice 3 (****)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation
$$y'' + y = \frac{1}{x}$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Indications : 1. Intégrer par parties pour G.
2. Utiliser le changement de variable $u = x + t$ dans $\mathrm{G}(x)$.
3. Déterminer la forme de $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ puis la limite de F et G en $+\infty$. Conclure à l'aide de la première question.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(t)^x \,\mathrm{d}t$$

Déterminer
$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$$

Indications : Pour la limite en 0^+, observer que pour $x > 0$

$$\mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left[\frac{\ln \mathrm{F}(x) - \ln \mathrm{F}(0)}{x - 0}\right]$$

Pour la limite en $+\infty$, comparer $\mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$ à $\|f\|_\infty$.

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. On suppose que P n'admet pas de racine. On pose

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \qquad \psi_r(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \,\mathrm{d}s\right)$$

et
$$\forall r \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})}{\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \,\mathrm{d}s$$

1. Soit $r \geqslant 0$. Justifier que ψ_r est bien définie, dérivable et déterminer $\psi_r'(t)$ pour t réel.
2. Soit $r \geqslant 0$. Déterminer une expression simple de $\psi_r(t)$ pour t réel et en déduire que la fonction F est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
3. Justifier que F est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ puis déterminer $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathrm{F}(r)$.
4. Conclure en établissant le théorème de d'Alembert-Gauss.

Indications : 2. Déterminer une équation différentielle dont ψ_r est solution. En déduire que ψ_r périodique puis conclure sur F.

3. Procéder par domination locale pour la continuité sous l'intégrale. Avec $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et $a_n \neq 0$, procéder par convergence dominée pour $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathrm{F}(r) - n$ avec une domination élaborée par une utilisation multiple de l'inégalité triangulaire (directe et aussi inverse).