ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°01

Exercice 1 (*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}\,(t)}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

Corrigé : 1. On a $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t} > 0$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant au voisinage de 0) et le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

2. On a $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}\,(t)}} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}\,(t)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^2}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on obtient que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}\,(t)}} \text{ diverge.}}$$

3. On a $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\frac{t-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable en 0 et 1 (faussement impropre). Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4. On a $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 1}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable en 0 et 1. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} \text{ converge.}}$$

5. On a $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[$ puis

$$\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}_{=\mathrm{O}(1)} \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 (faussement impropre) et intégrable en $+\infty$ par comparaison et critère de Riemann.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

6. On a $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$. D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \text{ diverge.}}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On a $f : t \mapsto 1-\cos\left(\dfrac{1}{t}\right) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad 1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est intégrable en 0 par comparaison et intégrable en $+\infty$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. On a $f : t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)} \in \mathscr{C}_{pm}(\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[\,,\mathbb{R})$ et

$$\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{t-\frac{\pi}{2}}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} \text{ diverge.}}$$

3. On a $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{5}\frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{5}$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable en 0 et 1 et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4. On a $f : t \mapsto \ln(1-\mathrm{e}^{-t}) \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\ln(1-\mathrm{e}^{-t}) \underset{t\to 0}{=} \ln(1-1+t+\mathrm{o}(t)) = \ln\left(t(1+\mathrm{o}(1)\right) = \ln t + \ln(1+\mathrm{o}(1)) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et $$\ln(1-\mathrm{e}^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable en 0 et $+\infty$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

5. Pour $x \geqslant \mathrm{e}$, on a

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_{\mathrm{e}}^{x} = \ln(\ln(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \text{ diverge.}}$$

6. On a $f : t \mapsto \dfrac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 et intégrable en $+\infty$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice 3 (*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$ 2. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$ 3. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln(t)^2)}$

Corrigé : 1. Avec le changement de variables $u = \ln(t)$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ qui converge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} \text{ converge et vaut } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 1.}$$

Variante : On peut observer

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right] \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que le crochet $\left[-\dfrac{1}{\ln(t)}\right]_{\mathrm{e}}^{+\infty}$ est fini d'où la convergence de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}$ qui vaut $\left[-\dfrac{1}{\ln(t)}\right]_{\mathrm{e}}^{+\infty} = 1$.

2. On a $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-1} \in \mathscr{C}_{pm}([\,2\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{t^2-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de la fonction. Puis

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{t+1-(t-1)}{(t+1)(t-1)}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^{\infty}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \text{ converge et vaut } \frac{\ln(3)}{2}}$

3. L'intégrande est continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$. On observe :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln(t)^2)} = [\mathrm{Arctan}\,(\ln(t))] \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}\,(\ln(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que le crochet $[\mathrm{Arctan}\,(\ln(t))]_1^{+\infty}$ est fini et par suite

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln(t)^2)} \text{ converge et vaut } [\mathrm{Arctan}\,(\ln(t))]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.}$$

Remarque : On peut aussi procéder au changement de variables $u = \ln(t)$.

Exercice 4 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout n entier.
2. Pour n entier non nul, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}.
3. En déduire une expression de I_n pour tout n entier.

Corrigé : 1. Soit n entier. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad f_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}$$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ et $f(t) \underset{t\to1}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ d'où l'intégrabilité de f sur $[\,0\,;1\,[$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, l'intégrale définissant } \mathrm{I}_n \text{ est convergente.}}$$

2. Soit n entier non nul. Les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -2\sqrt{1-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,[$ et le crochet $\left[-2t^n\sqrt{1-t}\right]_0^1$ est clairement fini. En intégrant par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[-2t^n\sqrt{1-t}\right]_0^1}_{=0} + 2n\int_0^1 t^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2n\int_0^1 t^{n-1}\frac{1-t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2n\mathrm{I}_{n-1} - 2n\mathrm{I}_n\end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu par linéarité de l'intégrale car convergence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \frac{2n}{2n+1}\mathrm{I}_{n-1}}$$

3. Par récurrence, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_0 = 2$$

En complétant le dénominateur par le produit des entiers pairs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = 2\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k)^2}{(2k)(2k+1)}\right) = 2^{2n+1}\frac{\prod_{k=1}^{n} k^2}{(2n+1)!}$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}$

Exercice 5 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On a $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2} \in \mathscr{C}_{pm}([0\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{(1+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$. Puis, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right]\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

par linéarité car convergence des intégrales concernées. Pour cette dernière, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ avec

$$-\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4}.}$

Variante : L'intégrande étant continue, on peut aussi utiliser le changement de variables $t = \tan(u) = \varphi(u)$ avec $\varphi : \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\to \left]0\,;+\infty\right[,\ u \mapsto \tan u$ bijective, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante. Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan(u)^2}{(1+\tan(u)^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et égales. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} \,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

2. On a $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \in \mathscr{C}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi, par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$. Avec le changement de variables $t = \dfrac{1}{u}$ (de classe $\mathscr{C}^1$, bijectif de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et strictement décroissant), les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+\dfrac{1}{u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} \,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et égales. On en déduit

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \text{ converge et est nulle.}}$$

3. On a $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t} \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{C})$ avec

$$|f(t)| = \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t} \,\mathrm{d}t$ converge absolument et par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t} \,\mathrm{d}t$ converge absolument et on a

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t} \,\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t}}{1-\mathrm{i}}\right]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\, \frac{1}{1-\mathrm{i}}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

Exercice 6 (**)

On pose
$$\forall a > 0 \qquad \mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} \,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\mathrm{I}(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Calculer $\mathrm{I}(1)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$ pour tout $a > 0$.

Corrigé : 1. Soit $a > 0$. Notons $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2}$ pour $t > 0$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis, par croissances comparées, on obtient $f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

d'où $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } a>0.}$$

2. L'intégrande f est continue. Avec le changement $t = 1/u$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{I}(1) = 0}$$

Variante : Le changement $u = \ln(t)$ permet également de conclure avec l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré en zéro.

3. Soit $a > 0$. Avec le changement de variable $t = au$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad a\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)+\ln(a)}{a^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = [\mathrm{Arctan}\,(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ converge et par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, il vient

$$\mathrm{I}(a) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{I}(1) + \frac{\pi}{2}\ln(a)\right]$$

On conclut
$$\boxed{\forall a > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln(a)}{2a}}$$

Exercice 7 (**)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

2. Établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

3. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$ puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. Par changement de variables avec $u = t^2$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}$ sont de même nature et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)} = \left[\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$ d'où la convergence et la valeur avec

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi}{4}}$$

2. Avec le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$, on obtient l'égalité attendue par convergence des intégrales concernées

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}}$$

3. On pose $\qquad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

On a $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad t^4+1 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2+t\sqrt{2}+1)(t^2-t\sqrt{2}+1)$

Ainsi, par linéarité car convergence, il vient

$$2\mathrm{I} + \sqrt{2}\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t\sqrt{2}+1} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t\sqrt{2}-1)^2+1} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi $\qquad \mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Puis, on considère $\varphi : \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\to \left]0\,;+\infty\right[, t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$ application de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$. D'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice 8 (**)

Montrer $\qquad \displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

Corrigé : On a $f : \left]0\,;+\infty\right[\mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right) \in \mathscr{C}_{pm}(\left]0\,;+\infty\right[, \mathbb{R})$ puis

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t} \geqslant 0$$

La fonction f est intégrable en 0 par comparaison (et même faussement impropre) mais l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et critère de Riemann. Par intégration des relations de comparaison (à une fonction positive), on trouve

$$\int_1^x \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x)$$

On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{o}(\ln(x))$ puisque $\ln(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$ et par conséquent

$$\int_0^x \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \ln(x) + \mathrm{o}(\ln(x))$$

On conclut $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)}$

Exercice 9 (*)

Déterminer un équivalent simple pour $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On a $t \mapsto \dfrac{\operatorname{th}(t)}{t^3} \in \mathscr{C}_{pm}([\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et

$$\frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$$

Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge absolument et par intégration des relations de comparaison (à une fonction positive), on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_x^{+\infty}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}}$$