Feuille d'exercices n°02

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$

Corrigé : 1. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = -2t\ln(t) + t\ln(1+t^2) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. La seconde étant clairement convergente, on en déduit

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \pi.}$

2. Les fonctions $t \mapsto 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}-1\right)$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,[$. On a

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}-1\right)\ln(t) = 2\left(1+\frac{t}{2}+\mathrm{o}(t)-1\right)\ln(t) = t\ln(t)(1+\mathrm{o}(1)) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et
$$2\left(1-\sqrt{1-t}\right)\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} 2\frac{t-1}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} -2\sqrt{1-t} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 2\frac{1-\sqrt{1-t}}{t\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Avec le changement de variables $u=\sqrt{1-t}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-t}}{t\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)u}{u(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{1+u}$ qui converge clairement. Ainsi, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = \left[2\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}-1\right)\ln t\right]_0^1 - 4\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$$

On conclut $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -4\ln(2).}$

3. Il s'agit d'une intégrale de fonction continue sur un segment ! On pose $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right) \iff t = \varphi(u) = 2\,\mathrm{Arctan}\,(u)$ bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Par trigonométrie, on a

$$\cos(t) = \cos\left(2\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

et $\quad \sin(t) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)^2\tan\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{2u}{1+u^2} \quad$ et $\quad \mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(\sqrt{2}+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi, en observant que $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(\sqrt{2}+1)^2+u^2} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{\pi}{2}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)} = \pi}$$

Exercice 2 (**)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur en cas de convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

Corrigé : 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat avec la divergence de l'intégrale. Supposons $\alpha \neq 0$. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\int_0^{x} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$$

Notons $\alpha = a + \mathrm{i}b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $|\mathrm{e}^{-\alpha t}| = \mathrm{e}^{-at}$ pour tout t réel. Si $a < 0$, alors $\mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et si $a > 0$, alors $\mathrm{e}^{-at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Supposons $a = 0$. Si $\mathrm{e}^{-\alpha t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, alors on trouve

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b(t+u)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell = \ell\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu} \quad \text{avec} \quad |\ell| = 1$$

ce qui implique $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu} = 1$ pour tout u réel. Il s'ensuit que $b = 0$ ce qui est exclu puisque $\alpha \neq 0$. On en déduit que si $a = 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ n'admet pas de limite. Ainsi, passant à la limite dans le cas $a > 0$, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \quad \text{et dans ce cas} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}}$$

2. Soit $x > 0$. On $\mathrm{Re}\,(x-\mathrm{i}) = x > 0$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$ ainsi que celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\;\mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\;\mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$ et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}$$

Sachant $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}}$$

Exercice 3 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer un équivalent de $\Phi(x)$ pour $x \to +\infty$.
2. Établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et calculer cette intégrale.

Corrigé : 1. On pose $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ pour $t \geqslant 0$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}([0\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$ et $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparées. Par comparaison et critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+.}$$

Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -2t\mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,x\,;+\infty\,[$ avec

$$-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t} \xrightarrow[t\to x]{} -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \quad \text{et} \quad -\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, en intégrant par parties, il vient

$$\Phi(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la nouvelle intégrale. On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} = \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$ et donc, par intégration des relations de comparaison, on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\Phi(x)\right)$$

Ainsi $$\boxed{\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}}$$

Variante : Avec le changement de variables $u = t^2$, il vient pour $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

puis $$\int_{x^2}^{x^2+x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}u \leqslant \Phi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{x^2}}\,\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire $$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

et on conclut comme précédemment.

2. La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et il en résulte que la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ avec $\Phi'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$ pour $x \geqslant 0$. Avec l'équivalent précédemment obtenu, on trouve

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x\Phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad x\Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x$ puis, en intégrant par parties,

$$\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[x\Phi(x)]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty}$$

On conclut $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall t \in\,]0\,;+\infty[\qquad f(t) = \ln(\mathrm{th}\,(t))$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]0\,;+\infty[\,,\mathbb{R})$ puis, comme $\mathrm{th}\,(t) \underset{t\to 0}{=} t + \mathrm{o}(t)$, on a

$$\sqrt{t}\ln(\mathrm{th}\,(t)) = \sqrt{t}\ln(t) + \sqrt{t}\ln(1+\mathrm{o}(1)) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

autrement dit $f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Ensuite, on a

$$\ln(\mathrm{th}\,(t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{th}\,(t) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\,(t) - 1 = -\frac{2\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2t}$$

On en déduit que $\ln(\mathrm{th}\,(t)) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est donc intégrable sur $[1\,;+\infty[$. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} \xrightarrow[t\to 1]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, on a $\left|\dfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$ d'où la convergence absolue de la deuxième intégrale d'après le critère de Riemann et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Remarque : On en déduit en particulier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ qui sont respectivement partie réelle et imaginaire de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. On a $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t} \in \mathscr{C}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Supposons $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergente. D'après le résultat de la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ convergente}$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

4. L'idée consiste à écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t\cos(t^2)}{2t}\,\mathrm{d}t$

Les fonctions $t \mapsto \sin(t^2)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{\sin(t^2)}{2t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t^2)}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle-\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or, on a

$$\frac{\sin(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t^2)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t.}$

Remarque : Cette intégrale s'appelle *intégrale de Fresnel*.

Exercice 5 (Intégrales de Bertrand ***)

Étudier, en fonction des réels α et β, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$.

Corrigé : L'intégrande f est continu par morceaux sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$. Supposons $\alpha = 1$. Avec le changement de variables $u = \ln(t)$, les intégrales $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ sont de même nature et par critère de Riemann, il s'ensuit

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 1, \text{ l'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$$

Supposons $\alpha > 1$ et soit $\gamma \in \left]1\,;\alpha\right[$. On a

$$t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}\ln(t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

clairement si $\beta \geqslant 0$ et par croissances comparées si $\beta < 0$. Ainsi, on a

$$\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, il s'ensuit que f est intégrable sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$. Supposons $\alpha < 1$. On a

$$tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\ln(t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

clairement si $\beta \leqslant 0$ et par croissances comparées si $\beta > 0$. Autrement dit, on a

$$\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(f(t))$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, alors par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. On conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\ln(t)^\beta} \text{ converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha < 1.}$$

Exercice 6 (***)

Déterminer la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$$

puis commenter.

Corrigé : Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto 1 - \cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t\sqrt{t}}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}$ est donc convergente car faussement impropre. Puis

$$\frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Par critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument) et on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Avec le développement limité usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$, il vient

$$\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + f(t) \quad \text{avec} \quad f(t) = -\frac{\sin(t)^2}{2t} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin(t)^2}{t}\right)$$

Déterminons la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Soit n entier. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)^2}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \left(\int_0^{\pi} \sin(u)^2\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{H}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Or, la série à termes positifs dite *harmonique* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann et par conséquent $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On en déduit par comparaison que $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{\sin(t)^2}{2t} \leqslant 0$$

ce qui garantit que f est de signe constant négatif pour t assez grand et rend licite l'usage du critère des équivalents. On en déduit la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$ convergeait, on aurait par linéarité de l'intégrale que

$$\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}$$

ce qui est faux. On en déduit

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

On a
$$\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$$

et pourtant les intégrales de ces fonctions ne sont pas de même nature. Il n'y a pas de contradiction. Le critère des équivalents donne une même nature pour des intégrales de fonctions équivalentes positives ou plus généralement de signe constant (en considérant leurs opposées pour se ramener au cas positif). Dans le cas présent, les fonctions ne sont pas de signe constant ce qui explique le phénomène observé.

Exercice 7 (***)

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$ et $a > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. Soit $x \geqslant 0$. Par changement de variables puis relation de Chasles, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^x [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t &= \int_a^{a+x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{a+x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
\int_0^x [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t &= \int_x^{a+x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad |f(t) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$$

Ainsi $\quad \forall x \geqslant \mathrm{A} \qquad \displaystyle\left|\int_x^{a+x} f(t)\,\mathrm{d}t - a\ell\right| = \left|\int_x^{a+x} [f(t) - \ell]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{a+x} |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$

et par conséquent

$$\forall x \geqslant \mathrm{A} \qquad \left|\int_0^x [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t - a\ell + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

D'où $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+a) - f(t)]\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } a\ell - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.}$

2. On applique le résultat précédent avec $\operatorname{Arctan}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$. On trouve

$$\boxed{\int_0^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$$

Exercice 8 (***)

On pose $\qquad \displaystyle\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$

Justifier que F est bien définie sur $]-1\,;1\,[$ puis déterminer une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \,]-1\,;1\,[$.

Corrigé : L'intégrale définissant F est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$ ce qui prouve que $\mathrm{F}(x)$ existe pour $x \in \,]-1\,;1\,[$. On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi : \,]\,0\,;+\infty\,[\, \to \,]\,0\,;\pi\,[\,, u \mapsto 2\operatorname{Arctan} u$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x\cos(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 + x + (1-x)u^2}$$

Puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2} = \frac{2}{1-x}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Exercice 9 (***)

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Corrigé : 1. Les fonction $t \mapsto \sin(t)-\sin(2t)/2$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ avec

$$\frac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t} = \frac{t-t+\mathrm{o}(t)}{t} = \mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, on a

$$\frac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t^2} = \frac{t-t+\mathrm{o}(t^2)}{t^2} = \mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)-\sin(2t)/2}{t^2}$ sur $\left]0\,;1\right]$ (faussement impropre) et sur $\left[1\,;+\infty\right[$ (comparaison et critère de Riemann). Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. On a $$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{I}$$

En intégrant par parties, on établit la convergence des intégrales $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale (car convergence), on a pour $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = 2t$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |\cos(t)-1| \leqslant |t|$$

d'où $$\forall t \geqslant 0 \qquad 1-t \leqslant \cos(t) \leqslant 1$$

Ainsi, après intégration, on a pour $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Par encadrement
$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ln 2$$

Ainsi
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$$

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(]\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ décroissante positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $(\mathrm{S}_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Supposons f intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Soit n entier non nul. Par décroissance de f, on a

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par sommation, on trouve

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{f(1)}{n} \leqslant \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, il vient par encadrement

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons f non intégrable. Comme f est positive, on en déduit que $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ par théorème de limite monotone appliqué à la fonction décroissante $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la minoration précédemment établie (qui ne requiert pas l'intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$), on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n \geqslant \frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par comparaison, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,] \text{ si et seulement si } (\mathrm{S}_n)_n \text{ converge et dans ce cas } \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.}$$