Corrigé du devoir en temps libre n°1

Problème I

1. Pour $t \in [\,0\,;\pi\,]$, on a

$$1-2x\cos(t)+x^2=(x-\cos(t))^2+\sin(t)^2 \geqslant (x-\cos(t))^2>0$$

puisque $x \in \,]\,1\,;+\infty\,[$. Par suite, la fonction $t \mapsto \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$ d'où

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{J}(x) \text{ est bien définie.}}$$

2. Avec le changement d'indices $k=2n-\ell \iff \ell=2n-k$, on a $\ell \in [\![\, n+1\,;\,2n\,]\!]$ et

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)=\prod_{\ell=n+1}^{2n}\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi(2\ell-n)}{n}}\right)=\prod_{\ell=n+1}^{2n}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi\ell}{n}}\underbrace{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}}_{=1}\right)$$

En remarquant $\quad x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}=x+1 \quad$ et $\quad x-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}=x-1$

il vient
$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)=\frac{x-1}{x+1}\prod_{k=n}^{2n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)}$$

3. Pour $k \in [\![\, 0\,;\,n-1\,]\!]$, on a

$$1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2=\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$$

d'où
$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left[\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\right]$$

D'après le résultat de la question précédente, on trouve

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\times\frac{x-1}{x+1}\prod_{k=n}^{2n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$$

Ainsi
$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\frac{x-1}{x+1}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n}}\right)}$$

4. D'après le théorème de convergence d'une somme de Riemann appliqué à la fonction continue $t \mapsto \ln\left(1-2x\cos(t)+x^2\right)$, on a

$$\mathrm{J}(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)\right]$$

Avec le résultat de la question précédente, il s'ensuit

$$\mathrm{J}(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{x-1}{x+1}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n}}\right)\right]$$

Par conséquent
$$\boxed{\mathrm{J}(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(x^{2n}-1)(x-1)}{x+1}\right)}$$

5. On a $\quad \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{(x^{2n}-1)(x-1)}{x+1}\right) = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(x^{2n}\left(1-x^{-2n}\right)\right) + \underbrace{\dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}_{=\mathrm{o}(1)}$

$$= \frac{\pi}{n}\left[2n\ln x + \ln(1-x^{-2n}) + \mathrm{o}(1)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\ln x$$

On conclut $\quad \boxed{\mathrm{J}(x) = 2\pi\ln x}$

Problème II

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)^2}{t^2}$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\frac{\sin(t)^2}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)^2}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Il s'ensuit que la fonction f est prolongeable par continuité donc intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto 1-\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Le crochet $\left[\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty}$ est fini car

$$\frac{1-\cos(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, on a

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ (faussement impropre en 0 puis comparaison et critère de Riemann sur $[\,1\,;+\infty\,[$). Il s'ensuit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin\left(t/2\right)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Un dernier changement de variable $t = 2u$ permet de conclure

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

3.(a) Chaque intégrale est une intégrale de fonctions continues sur $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ ou $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ qui sont toutes prolongeables par continuité en la ou les bornes ouvertes d'où

$$\boxed{\text{Les intégrales définissant } \mathrm{I}_n, \mathrm{A}_n \text{ et } \mathrm{B}_n \text{ convergent.}}$$

Par une étude de fonctions ou concavité de sin et convexité de tan sur $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$, on obtient

$$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad \sin(t) \leqslant t \leqslant \tan(t) \Longrightarrow \frac{\sin(nt)^2}{\tan(t)^2} \leqslant \frac{\sin(nt)^2}{t^2} \leqslant \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2}$$

Par comparaison puisque les intégrales convergent, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{A}_n}$$

Remarque : La convergence de A_n prouve, par comparaison, la convergence de I_n et B_n puisqu'il s'agit d'intégrales de fonctions positives.

3.(b) Par linéarité de l'intégrale (car convergence), on a

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n+2} - 2\mathrm{A}_{n+1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)^2}\left[\sin(nt)^2 - 2\sin((n+1)t)^2 + \sin((n+2)t)^2\right]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par linéarisation, on a

$$\sin(nt)^2 - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = \frac{1}{2}\left[2\cos(2(n+1)t) - \cos(2nt) - \cos(2(n+2)t)\right]$$

Par trigonométrie, on sait

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Ainsi

$$2\cos(2(n+1)t) - \cos(2nt) - \cos(2(n+2)t) = 2\cos(2(n+1)t) - 2\cos(2t)\cos(2(n+1)t)$$

Par suite

$$\Delta_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2(n+1)t)\frac{1-\cos(2t)}{2\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t)\,\mathrm{d}t = 0$$

D'autre part, pour $n \geqslant 1$ (on a $\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0 = 0$) :

$$\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)^2\left(\frac{1}{\sin(t)^2} - \frac{\cos^2 t}{\sin(t)^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)^2\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n+2} - 2\mathrm{A}_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \frac{\pi}{4}}$$

Variante : D'autres stratégies sont possibles pour $\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n+1} - 2\mathrm{A}_{n+1}$. On peut utiliser

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sin(a)^2 - \sin(b)^2 = \sin(a-b)\sin(a+b)$$

On peut aussi « symétriser » l'intégrande en écrivant $n = n+1-1$ et $n+2 = n+1+1$ puis développer par trigonométrie.

3.(c) On a $\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_{n+2}$, d'où $(\mathrm{A}_n)_n$ est arithmétique. Avec $\mathrm{A}_0 = 0$ et $\mathrm{A}_1 = \dfrac{\pi}{2}$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n = \frac{n\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

3.(d) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{(2n-1)\pi}{4n} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Avec le changement de variable $u = nt$ dans I_n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\mathrm{I}_n}{n} = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{I}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}}$$

Problème III

La fonction f_α est continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour $\alpha > 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ d'où l'intégrabilité de f_α sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour $\alpha \in\,]\,0\,;1\,]$, on procède en intégrant par parties. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et

$$-\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to 1]{} -\cos(1) \qquad -\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or, la seconde converge absolument puisque $1+\alpha > 1$ et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ s'ensuit. Par ailleurs, on a

$$\forall t \geqslant 1 \qquad \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \geqslant \frac{\sin(t)^2}{t^\alpha} = \frac{1-\cos(2t)}{2t^\alpha}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge par un argument similaire à précédemment avec une intégration par parties et un raisonnement par l'absurde garantit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge. Par comparaison, on conclut que la fonction f_α n'est pas intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Supposons enfin $\alpha \leqslant 0$. En observant $t^{-\alpha} \geqslant 1$ pour $t \geqslant 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} t^{-\alpha}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ était convergente, on aurait

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{(2n+1)\pi} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui contredit la minoration précédente. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument pour } \alpha > 1\text{, converge mais pas absolument pour } \alpha \in\,]\,0\,;1\,] \text{ et diverge pour } \alpha \leqslant 0.}$$