ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 12/09/2024

Devoir en temps libre n°1

Problème I

Soit $x \in \,]\,1\,;+\infty\,[$. On cherche à calculer l'intégrale de Poisson

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $\mathrm{J}(x)$ est bien définie.

2. Établir l'égalité $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = \frac{x-1}{x+1}\prod_{k=n}^{2n-1}\left(x - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$$

3. Montrer $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) = \frac{x-1}{x+1}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n}}\right)$$

4. En déduire $$\mathrm{J}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(x^{2n}-1)(x-1)}{x+1}\right)$$

5. Conclure.

Problème II

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et établir l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{\tan(t)^2}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Justifier la convergence des intégrales définissant $\mathrm{I}_n, \mathrm{A}_n$ et B_n et montrer
   $$\mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{A}_n$$
   (b) Calculer $\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n+2} - 2\mathrm{A}_{n+1}$ puis $\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n$.
   (c) En déduire des expressions de A_n et B_n en fonction de n.
   (d) Montrer que $$\frac{\mathrm{I}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
   et préciser la valeur de cette intégrale.

Problème III

Pour α réel, on pose $$\forall t \geqslant 1 \qquad f_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

Discuter en fonction de α de la convergence et de la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.