Devoir en temps libre n°2

Problème I

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer les limites de F et F′ en $+\infty$.
3. Exprimer F″ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
4. Montrer
$$\begin{cases} \forall x > 0 & \mathrm{F}(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Problème II

On pose $$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,-1\,;1\,]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;1\,]$.
3. Établir $$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}$$