Préparation à l'interrogation n°02

1 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

2 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

3 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k$ avec $|\alpha| < 1$

4 Racines de l'unité

Soit n entier non nul. On a $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \right\}$

On a $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (\mathrm{X}-\omega) = \mathrm{X}^n - 1 \qquad \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \delta_{n,1} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$

5 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos x$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{1-x}$;
4. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de
$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$

6 Techniques

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{K})$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
Application : Soit $\alpha > 0$. Pour n entier non nul, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha n^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

D'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

7 Polynômes

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $a \in \mathbb{K}$ et m entier non nul. On a

$$a \text{ racine d'ordre } m \iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{(m)}(a) \neq 0$$

$$a \text{ racine d'ordre au moins } m \iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0$$

8 Exercice type

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites à valeurs dans $]\,0\,; +\infty\,[$ avec

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ ou } +\infty$$

Alors, on a
$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$$

Corrigé : On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n(1+\mathrm{o}(1))$ d'où

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln v_n + \ln(1+\mathrm{o}(1)) = \ln v_n + \mathrm{o}(1) = \ln v_n + \mathrm{o}(\ln v_n)$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

9 Exercice type

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathscr{C}^1$), il vient

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit
$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q\times(q-1)\times\ldots\times 1}{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$$

avec
$$\mathrm{I}_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$$

puis
$$\mathrm{I}_{p,q} = \frac{1\times\ldots\times(p-1)\times p\times q!}{1\times\ldots\times p\times(p+1)\times\ldots\times(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où
$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}}$$

10 Questions de cours

Séries numériques, graphes usuels.